


FONDO PIZZOFALCONE

MANUEL
DE L'INGÉNIEUR
DU CADASTRE.

MANUEL

DE

L'INGÉNIEUR DU CADASTRE,

PAR M.L POMMIÉS,

Professeur au Lycée Napoléon, Examinateur des Ingénieurs du Cadastre,
Membre de l'Athénée des Arts;

PRÉCÉDÉ

D'UN TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE,

PAR A. A. L. REYNAUD,

Répétiteur d'Analyse à l'École polytechnique, Professeur des Élèves du Cadastre;

ET

Des INSTRUCTIONS publiées pour l'exécution des ARPENTAGES PARCELLAIRES, approuvées par le Ministre des finances.



> Il faut à la plupart des artistes, des livres et des leçons uniquement dirigés vers l'application, et bornés par conséquent à l'exposition claire et précise des préceptes; les meilleurs traités sont alors ceux qui renferment le plus d'exemples et le moins de raisonnemens. Cette espèce de livres, qu'on doit considérer comme des manuels dont il faut se rendre l'usage familier, est très-propre à répandre l'instruction parmi ceux qui pratiquent les arts.
>
> *Essais sur l'Enseignement*, par LACROIX, membre de l'Institut et de la Légion d'honneur.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

1808.



Se trouve à Paris,
Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

A M. HENNET,

COMMISSAIRE IMPÉRIAL DU CADASTRE, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, MEMBRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DE TURIN.

MONSIEUR,

EN vous dédiant le Manuel de l'Ingénieur du Cadastre, *je remplis un devoir que votre bienveillance a rendu sacré pour moi, et je cède au besoin de vous offrir un gage de ma reconnaissance et de mes respects.*

C'est vous, Monsieur, que le Gouvernement a chargé de diriger, sous les ordres du Ministre des finances, les travaux du Cadastre général de l'Empire. Vous m'avez permis de coopérer à cette grande entreprise, en m'appelant près de Son Exc. pour me confier l'enseignement et l'examen des Ingénieurs de tout grade, ainsi que la rédaction des écrits nécessaires au développement des instructions officielles. Vous avez paru desirer que je rassemblasse, pour le service des Ingénieurs, les matériaux épars dans mes leçons et dans ces commentaires; je les ai réunis suivant vos intentions, et me suis renfermé dans les limites que vous m'avez prescrites : il en est résulté l'ouvrage que j'ai l'honneur de vous présenter.

Je sais tout ce qui manque à ce livre pour qu'il soit digne de l'attention des Géomètres; mais j'ai considéré sa destination particulière,

et j'ai préféré l'avantage d'être plus utile, à la gloire de paraître plus savant. Votre estime et les témoignages de satisfaction que j'ai reçus du Ministre, après l'exercice des diverses fonctions dont il m'a honoré, me servent de dédommagement, et suffiseut à ma récompense.

Pour vous, Monsieur, qui, par une heureuse distribution du temps, savez allier la culture des lettres à la conduite des affaires, votre nom peut espérer d'être inscrit avec une égale distinction dans les fastes des Muses et daus les annales de l'Histoire : on le prononcera sans doute après celui du Ministre éclairé dont vous secondez si dignement les efforts par votre zèle et par vos talens. La célébrité que sa modestie semble fuir, sera le prix inévitable de la sagesse de son administration; et les éloges donnés à l'importance de ses vues par la bouche même de SA MAJESTÉ, font assez connaître qu'elles sont d'accord avec les vastes projets que ce règne voit exécuter, et qu'elles flattent le goût du Monarque pour toutes les actions qui portent le caractère de la grandeur et de la justice.

Un suffrage si imposant devient pour le Ministre et pour vous, Monsieur, le garaut assuré de la reconnaissance des contemporains et de l'estime de la postérité.

Je suis avec respect,

MONSIEUR,

Votre très-humble et très-obéissant serviteur,
M.L POMMIÉS.

DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

CHEZ un peuple agricole, où toutes les terres sont partagées entre les citoyens, un des impôts les plus équitables est celui que le législateur établit sur les biens territoriaux : car enfin, dit *Rousseau*, c'est ce qui produit qui doit payer; et nul individu ne peut se refuser au sacrifice d'une partie de sa propriété pour la défense et la conservation de l'autre, sans renoncer aux avantages que lui assure le pacte social. Mais il ne suffit pas que la légitimité des contributions foncières soit reconnue, ni que la loi, détruisant les priviléges, impose à tous les propriétaires un tribut proportionnel, comme elle garantit à tous la même protection ; il faut encore que le contribuable soit bien pénétré de l'esprit de cette loi, qu'il puisse en comprendre le texte et l'éclaircir au besoin par ses propres lumières; il faut enfin qu'il soit assez instruit sur les actes de l'administration exécutive pour être conduit à la confiance par le sentiment de la justice publique. On ne peut inspirer cette conviction nécessaire que par un mode de recouvrement, libre de l'influence de toute autorité locale, d'après lequel chaque particulier puisse asseoir lui-même et fixer sa dette, sans avoir à redouter les caprices de l'arbitraire, la partialité des collecteurs, ni les vexations des préposés.

Tel est le but que le Gouvernement se propose d'atteindre en ordonnant l'exécution du *Cadastre* de France. On conçoit que cette immense opération, commencée aujourd'hui sur tous les points de l'Empire, est, d'après son objet, divisée en deux parties distinctes : la première, qui dépend des principes et des procédés réguliers de la géométrie, consiste à former le plan de toutes les propriétés individuelles, pour en déduire la connaissance exacte de leur superficie ; dans la seconde, on se propose d'estimer le rapport des terres, et d'apprécier leur produit. Cette évaluation, quoique dirigée par des règles moins fixes que celles de la géodésie et de l'arpentage, n'en sera pas moins incontestable, à cause des épreuves multipliées et sévères qui en vérifieront la justesse, et des sages mesures adoptées par le Ministre des finances pour soustraire ce travail important aux erreurs du jugement des experts.

Les anciens ont montré beaucoup de sagesse dans les réglemens qu'ils avaient faits pour assurer une égale distribution des impôts entre les citoyens. On cite plusieurs cadastres qui confirment, à cet égard, l'excellence de leur législation ; mais il ne paraît pas qu'ils aient pu fonder aucune de ces opérations sur le double travail que je viens d'indiquer. Malgré la cause assez probable à laquelle on rapporte l'origine de la géométrie chez les Égyptiens, et les progrès de cette science parmi les Grecs, l'arpentage et la géodésie furent peu cultivés dans l'antiquité. On doit attribuer l'indifférence des savans de cette époque pour les procédés de la pratique, au goût exclusif qui les entraînait vers les études spéculatives, et plus encore au défaut et à l'imperfection des instrumens. Les législateurs obtenaient alors des lois les secours que nous cherchons dans les arts ; un plein succès couronna plusieurs fois la pureté de leurs intentions. En Grèce, les subsides destinés à soutenir la guerre contre les Perses furent réglés par *Aristide* avec tant d'équité, que ses contemporains ont appelé cet impôt, *l'heureux sort de la Grèce*. À Rome, *Servius Tullius*, cet illustre fondateur des constitutions de la République, voulant répartir avec justice le *rationnaire* ou taxe personnelle, fit dresser une liste exacte de tous les citoyens, inscrivit à la suite de leurs noms des renseignemens précis sur les biens qu'ils possédaient, et voulut que ce dénombrement se renouvelât périodiquement à des époques déterminées : c'est le premier cadastre général dont les écrivains aient fait mention. Sous le gouvernement consulaire, cette utile institution fut abandonnée. Il est vrai que, pendant le cours de ses victoires et de ses prospérités, l'État n'exigea des citoyens presque aucune imposition ; les revenus du domaine et les dépouilles des vaincus suffisaient à tous les besoins : mais *César* et ses successeurs rétablirent le cens ordonné par *Tullius*, et créèrent cette espèce d'impôt appelé *taille*, lequel s'est conservé jusqu'à nos jours sous la même dénomination.

En France, plusieurs provinces entreprirent à différentes époques le cadastre de leur territoire ; mais deux fois seulement, depuis l'existence de la monarchie, cette opération fut étendue sur tout le royaume. Ordonnée d'abord par la déclaration du 21 novembre 1763, elle fut renouvelée après trente ans environ par le décret de l'Assemblée constituante : jamais elle ne reçut son exécution. Pour expliquer les causes qui s'y opposèrent, il suffit de rappeler les principaux événemens de notre histoire. Sous les rois de la première race, comme à Rome pendant la durée de la république, les revenus

de l'État étaient en partie prélevés sur les domaines : il en coûtait peu pour mettre en valeur ces grandes possessions nationales, parce que les Romains et les Francs avaient des esclaves qu'ils chargeaient de la culture des terres. Cependant l'insuffisance des produits était réparée par les dons volontaires que les Français offraient à leurs rois sous le nom de *coutume libre*, et par des impôts annuels établis sur les Gaulois. Ces derniers étaient donc les seuls qui eussent un intérêt bien réel à voir régner dans les lois fiscales la justice et la modération; et comme ils partageaient avec leurs vainqueurs la possession des terres, que d'ailleurs la France était souvent divisée en plusieurs royaumes, il était impossible de proposer et d'étendre sur ce vaste pays un cadastre universel. Il paraît néanmoins, suivant *Grégoire* de Tours, que *Sigebert* et *Childebert* son fils eurent recours à cette mesure pour connaître les mutations introduites dans la division des propriétés par le mouvement des héritages, et lever les embarras qui rendaient chaque jour plus difficile la perception des tributs. Peut-être ce cadastre se fût exécuté dans toute l'Austrasie, si, par une inconséquence trop commune aux hommes quand l'intérêt les dirige, *Grégoire*, qui parla d'abord de cette ordonnance avec éloge, n'eût ensuite opposé la plus grande résistance à ce qu'elle fût observée sur les terres de sa juridiction. Sous les descendans de *Charlemagne* et sous les premiers rois de la troisième dynastie, la faiblesse du pouvoir ne leur permit pas de se livrer à de si grandes opérations de finances; la tyrannie du gouvernement féodal avait couvert la France de petits souverains qui levaient en despotes les contributions de leurs vassaux, et les accablaient de taxes au gré de leurs caprices ou de leurs besoins.

Après les croisades, et lorsque les rois, ayant affermi peu à peu leur puissance, eurent affranchi certaines villes du joug des seigneurs, ils sentirent la nécessité de régler par de sages dispositions l'ordre qui doit assurer les revenus de l'État : ils dirigèrent de ce côté leurs efforts; mais, trop souvent détournés par les querelles civiles, qui troublèrent presque sans relâche la paix intérieure, ils ne purent appliquer avec succès à leurs vues les principes d'un cadastre général. On vit, en effet, se succéder en peu de temps et ces projets plusieurs fois renouvelés de conquêtes ultramontaines, qui forcèrent d'augmenter les subsides avec le nombre des troupes réglées; et les guerres sanglantes de religion, qui semèrent dans toute la France les meurtres, les embrasemens et le pillage; enfin la découverte du Nouveau-Monde, qui fit naître chez les Européens l'avidité des

richesses et l'ardeur des expéditions dispendieuses. Au milieu de toutes ces agitations, on conçoit que les chefs de tant de partis et les gouvernemens eux-mêmes devaient être peu délicats sur les moyens d'alimenter leurs trésors : en effet, les tailles, d'abord si modérées, s'élevèrent continuellement pendant ces troubles, et devinrent plus intolérables encore par l'injustice de leur distribution que par l'excès de leur accroissement ; elles se trouvèrent portées à tel point sous *Henri IV*, que ce monarque, touché des misères publiques, et cédant à sa générosité naturelle autant qu'à la prudence, ordonna, pour ses peuples appauvris, la remise de plusieurs années arriérées.

A l'énorme valeur des impôts, et sur-tout à l'excessive inégalité de leur répartition, se joignaient les exactions odieuses des receveurs et des huissiers. Les frais de poursuite qu'ils faisaient subir aux taillables, les rigueurs qu'ils exerçaient à leur égard, la faveur qu'ils montraient pour leurs parens et leurs amis, et les vengeances secrètes qui restaient impunies, excitaient l'indignation et quelquefois des révoltes. Pour les apaiser ou pour les prévenir, les rois multiplièrent les édits et les déclarations ; ils envoyèrent des délégués dans diverses provinces avec mission de consulter les notables, et de régler, d'après leurs avis, la quotité des impôts directs, et le meilleur mode de recouvrement. Plusieurs pays d'*états* indiquèrent la source des abus ; sur leurs vives réclamations, ils obtinrent l'abolition des priviléges attachés aux terres nobles, et procédèrent alors à leurs cadastres partiels : de ce nombre sont le Languedoc, le Dauphiné, la Provence et la Haute-Guienne. Les obstacles que l'opération éprouva dans ces intendances, de la part d'une foule de particuliers et de corporations intéressés à refuser la connaissance exacte de leur fortune, firent désespérer de la mettre jamais à fin. Les plus sages eux-mêmes, dont on avait suivi les conseils, fatigués par tant de contrariétés et de dépenses, craignirent de s'être égarés dans leur zèle, et d'avoir proposé des moyens équivoques de soulagement, parce qu'il arriva que les pays cadastrés furent, pour la plupart, plus imposés que les autres. A ne considérer que ces résultats, le remède devait être jugé pire que le mal : aussi cette opinion prévalut-elle dans l'esprit de ceux qui n'observèrent pas que l'effet naturel d'un cadastre bien ordonné est de répartir proportionnellement l'impôt sur la totalité du territoire, et d'empêcher qu'aucune parcelle ne puisse être soustraite à la loi. Lors donc qu'une province administrée de cette manière se trouve environnée de pays non cadastrés, où les terres les plus productives sont exemptes de tous droits, et où les impositions

des

des autres propriétés sont presque toujours établies sur des déclarations infidèles, les contribuables ne devraient pas être surpris de paraître plus chargés que leurs voisins. Il suffirait d'introduire également le cadastre chez ces derniers, pour rétablir les termes d'une comparaison équitable, et faire disparaître toutes les apparences légitimes de plaintes.

Un exemple mémorable vient à l'appui de ces remarques : je veux parler du cadastre de la Savoie, qui fut terminé en 1738, sous le règne de *Victor Amé II.* Avant ce temps, les contributions foncières étaient levées, dans ce pays, de la même manière qu'en France; les ecclésiastiques, les nobles et les bourgeois de certaines villes jouissaient d'exemptions entières ou limitées, de manière que les charges publiques étaient supportées par un petit nombre de propriétaires. Le roi voulut restreindre les priviléges des uns et anéantir les droits accordés aux autres; il ordonna dans cette vue le cadastre général de ses États. Les opérations commencèrent en Savoie vers l'année 1729, et s'étendirent ensuite au Piémont. Le travail fut conduit avec beaucoup d'exactitude et de précision; sa justesse fut vantée par tous les Ingénieurs géographes, son utilité par tous les économistes; et les habitans confirmèrent par leur assentiment les suffrages des artistes et des hommes d'état. Le gouvernement et les peuples en recueillirent les fruits pendant près de cinquante années; car, au commencement de la révolution qui détruisit les réglemens établis pour perpétuer ce cadastre, il servait de base à la répartition des impôts fonciers, et de régulateur suprême aux contestations qui s'élevaient entre les particuliers sur les limites de leurs héritages. Les raisons précédentes, et ce fait qui les confirme, rendent sensibles les inconvéniens des cadastres partiels, et démontrent tout-à-la-fois l'utilité d'un cadastre général.

Les divers effets qui résultèrent du mauvais succès des nombreuses tentatives faites en France, furent remarquables dans les administrations provinciales créées en 1787, par les avis opposés qui s'élevèrent dans ces assemblées sur les cadastres : les unes en ordonnèrent l'exécution; les autres, au contraire, rejetèrent cette mesure comme illusoire et dispendieuse; et rien n'était plus propre à la rendre telle que les opinions qui s'opposaient à sa généralité. Enfin, l'Assemblée constituante fut convoquée : là, toutes les idées libérales, toutes les grandes maximes politiques, déjà proclamées par les écrivains du XVII.ᵉ siècle, furent reproduites par le zèle, défendues par l'éloquence, et sanctionnées par la sagesse. Appelée sur-tout à détruire les

vices de l'administration des finances, cette Assemblée ne trouva pas de remèdes plus salutaires pour y parvenir que d'ordonner le cadastre par-tout où il serait reconnu nécessaire : c'était le prescrire pour toute la France. Son décret du 28 août 1791 jeta les bases de cette utile entreprise ; celui du 16 septembre en régla l'exécution, qui fut confiée au Ministre des contributions directes. Tout semblait alors en garantir le succès : l'abolition des priviléges, la nouvelle division de la France en départemens, et cette favorable disposition des esprits, qui, dans ce moment de crise, se prêtaient sans murmure et sans contrainte à toutes les innovations qui intéressaient le bien public. La direction des travaux fut donnée à M. *de Prony*, membre de l'Institut. Ce savant publia, le 21 mai 1792, une Instruction sur le levé des plans de masses et de détails ; elle fut soumise au jugement des académiciens *Borda*, *Lagrange*, *Laplace* et *Delambre*, qui terminèrent leur rapport par ces mots :

« L'Instruction rédigée par M. *de Prony* nous a paru claire, précise et » complète ; en la suivant dans tous ses points, on aura de fort bons plans » partiels, construits de manière à former, par leur réunion, le cadastre gé- » néral exact de toute la France. »

L'opération toucherait maintenant à son terme, si les guerres de la révolution et les troubles intérieurs qui éclatèrent de toutes parts à cette époque, n'eussent forcé le Gouvernement de remettre ces travaux à des temps plus tranquilles. Toutefois M. *de Prony* occupa son zèle dans le cabinet, et rendit aux sciences un service signalé, en faisant calculer par des méthodes ingénieuses, dont la plupart lui appartiennent, trois tables de logarithmes et de lignes trigonométriques, supérieures par leur étendue et leur approximation à toutes celles de cette espèce qui les avaient précédées.

Après seize ans d'orages, il fut permis enfin d'espérer des jours sereins : la Constitution de l'an 8 en fit naître l'aurore. Le Gouvernement des Consuls, après avoir renversé les factions, voulut tirer toute sa force de la confiance et du crédit public : en portant ses regards sur les nombreux désordres qu'il se proposait de réparer, il fut frappé des inégalités sensibles de la répartition des impôts fonciers. Telle commune, en effet, payait le tiers de ses revenus, lorsque d'autres n'en donnaient à peine que la seizième partie; la même disproportion avait lieu entre les particuliers, et les réclamations s'élevaient de tous les points de la République. Le Ministre des finances voulut sérieusement y faire droit : il nomma dans ce dessein une commission qui se réunit en l'an 10, sous la présidence de M. *Dauchy*, conseiller d'état. Le seul

moyen vraiment efficace était un cadastre général : la Commission le sentit; mais, pour arriver à ce but, il fallait éviter deux écueils : le premier, de faire entreprendre une opération que les grands propriétaires et les acquéreurs de domaines nationaux se seraient empressés de contrarier, en opposant l'inutilité des efforts que les anciens gouvernemens avaient tentés ; le second, d'en fonder l'exécution sur un travail qui, en exigeant une dépense considérable de temps et d'argent, forcerait d'attendre pendant beaucoup d'années le bienfait d'une juste répartition.

C'est alors que la Commission a proposé, comme un simple essai, l'arpentage et l'estimation des produits d'un certain nombre de communes prises au hasard dans chaque arrondissement communal. Ses conclusions, présentées au Ministre, donnèrent lieu à l'arrêté des Consuls, en date du 12 brumaire an 11, par lequel il était ordonné que le plan du territoire de deux communes au moins et de huit au plus, dans chaque sous-préfecture, serait levé, pendant le cours de l'an 11, par section et nature de culture. Ces travaux, purement géométriques, ont été terminés, et suivis de l'expertise des communes que le sort avait indiquées pour cette épreuve : on se ménageait par-là les moyens d'observer dans son esprit la loi du 1.er décembre 1790, qui fixe le mode d'évaluation du revenu imposable des propriétés foncières, et dont les principes et les dispositions ont servi de base à celle du 3 frimaire an 7.

Le Ministre des finances fut chargé d'exécuter cet arrêté des Consuls; et le Gouvernement nomma M. *Hennet* Commissaire spécial pour diriger, sous les ordres de son Excellence, toutes les opérations de l'arpentage et de l'expertise. La plupart des Préfets établirent dans leurs fonctions le Géomètre en chef sous la responsabilité duquel ces travaux géodésiques devaient être entrepris et mis à fin dans un délai prescrit; et ces Ingénieurs s'adjoignirent assez de collaborateurs, pour exécuter la carte figurative des communes désignées dans leurs départemens respectifs.

Cependant la Commission reconnaissait toute l'insuffisance de la mesure qu'elle avait présentée ; car, en expertisant ainsi quelques communes prises au hasard dans un arrondissement, que pouvait-on raisonnablement conclure sur la totalité du territoire ! Si le sort les a marquées parmi les terres de meilleure qualité, tout l'arrondissement sera-t-il réputé de première valeur ? Si, au contraire, le choix est tombé sur des terrains sans produits, faudra-t-il inscrire dans cette classe le cinquième et souvent le quart du département ?

L'inconséquence saute aux yeux. Quels étaient donc les desseins de la Commission ! de convaincre les propriétaires que les vues du Gouvernement étaient de respecter leurs droits en assurant ceux de l'État, et d'accorder avec elle les opposans sur ces deux points ; savoir, *l'inégalité de la répartition*, et *l'insuffisance des moyens adoptés pour la faire disparaître*. L'exécution de l'arrêté du 12 brumaire produisit cet effet desiré.

Il était difficile de trouver des arpenteurs instruits qui voulussent abandonner leurs travaux accoutumés pour se livrer à une opération dont la durée, l'importance et la rétribution ne semblaient devoir offrir aucun dédommagement assuré. MM. *Chanlaire* et *la Prade*, qui furent consultés par la Commission, ouvrirent, avec l'autorisation du Ministre, des leçons de géométrie pratique, qu'ils donnèrent gratuitement pendant plusieurs mois ; et bientôt, à force de zèle, de soins et d'activité, ils adressèrent des arpenteurs dans les départemens qui ne pouvaient s'en pourvoir. Bientôt les opérations commencèrent sur toute la France ; elles eurent pour guides des instructions précises, rédigées, en partie, par ces deux coopérateurs, et où la prévoyance du Ministre se manifesta clairement par l'adoption des trois bases suivantes : 1.° *l'uniformité de disposition des plans*, 2.° *l'uniformité de leurs échelles*, 3.° *le rattachement de ces plans à des points fixes pris au dehors des territoires décrits*.

L'opinion publique une fois fixée sur la nécessité de généraliser les arpentages, par l'effet des résultats obtenus pendant l'an 11, le Gouvernement étendit sur toutes les communes de l'Empire les travaux qu'il avait commandés sur un petit nombre ; et, par son arrêté du 27 vendémiaire an 12, il ordonna le cadastre général de la France. Il ne s'agissait encore, à la vérité, que de construire les plans de masses de chaque commune par section et nature de culture : mais ce progrès immense fit bientôt sentir que la plupart des mesures adoptées pour les premières tentatives devenaient insuffisantes dans une si vaste entreprise. Il fallut des Géomètres en chef qui, sans être étrangers à l'ordre administratif, fussent capables de diriger, sur une étendue de cinq à six cent mille hectares environ, des opérations géométriques importantes et délicates ; il fallut deux mille Ingénieurs secondaires pour les détails topographiques ; et les premières Instructions publiées par le Ministre durent recevoir une extension correspondante à celle de l'opération elle-même.

Pour satisfaire à ces nouveaux besoins, le Ministre autorisa l'ouverture,

à Paris, d'un second cours de géodésie théorique et pratique, plus étendu que le premier, où seraient développées toutes les connaissances élémentaires utiles aux Ingénieurs du cadastre. Les leçons de ce cours furent confiées à quatre professeurs, sous l'inspection de M. le Commissaire impérial et la direction de MM. *Chanlaire* et *la Prade*. MM. *Benazet*, *Hautier*, *Reynaud* et moi ayant été choisis pour remplir ces fonctions, chacun de nous se chargea d'une partie de l'enseignement, et fit ses efforts pour justifier la confiance du Ministre. Dans la suite, son Excellence arrêta qu'aucun aspirant ne serait élevé désormais au grade de Géomètre en chef et d'Ingénieur secondaire, qu'il n'ait subi un examen des professeurs. Peu à peu les places furent occupées par des personnes capables d'en remplir avec succès les devoirs : elles assurent aujourd'hui à leurs titulaires une honorable existence ; et devenues le prix du mérite, elles ont acquis la considération qui les fait rechercher avec empressement.

Le service du cadastre recevait ainsi des améliorations annuelles, et tendait continuellement vers son dernier degré de perfection. Enfin le Ministre, éclairé par cinq ans d'expérience et par les rapports de M. le Commissaire impérial, confirmé dans ses desseins et dans ses vues par les demandes d'un grand nombre de propriétaires et les vœux légalement exprimés des conseils municipaux, résolut, vers la fin de 1807, d'entreprendre le *Parcellaire*, en se servant des opérations déjà terminées sur quatorze mille communes, et de rétablir ainsi, dans toute leur plénitude, les dispositions législatives de l'Assemblée constituante. Cette dernière détermination, consacrée par le Gouvernement, a motivé la loi du 15 septembre 1807 et le rapport qui la précède.

C'est ainsi que la prudence du Ministre et les efforts constans de M. le Commissaire impérial ont élevé par degrés le cadastre de l'Empire, d'un simple essai borné d'abord au levé des plans de masses de dix-huit cents communes environ, jusqu'au parcellaire de plus de cinquante mille. Jamais opération d'État ne fut plus immense dans ses détails, plus importante dans ses résultats, plus louable dans son objet. S'il est vrai, ainsi que l'ont pensé *Vauban*, l'abbé *de Saint-Pierre*, *d'Argenson* et *Turgot*, que les taxes établies sur les terres soient la contribution la plus juste comme la plus invariable, une répartition proportionnelle de cet impôt entre les contribuables devient l'acte administratif le plus utile et le plus grand. Le souverain qui fonde sur cette base la prospérité de ses États, et le ministre qui met sa

gloire à réaliser de si nobles projets, méritent la reconnaissance des siècles et celle de leurs contemporains. C'est par-là qu'*Aristide* a justifié le surnom de Juste, et *Colbert* celui de Grand. C'est le sentiment de cette vérité qui inspirait les sages plans des philosophes économistes, et qui faisait dire à *Raynal*, dans le style qui le caractérise : « Un cadastre qui mesurerait avec » soin les terres, qui apprécierait avec équité leur valeur, serait seul capable » de fonder un bon système de finances. On n'a que rarement, qu'imparfai- » tement appliqué un principe si simple et si lumineux. Il faut espérer que » cette belle institution, quoique vivement repoussée par le crédit et la cor- » ruption, sera perfectionnée dans les États où elle a été adoptée, et qu'elle » sera introduite dans les empires où elle n'existe pas encore. Le monarque » qui signalera son règne par ce grand bienfait, sera béni pendant sa vie; » il laissera un nom cher à la postérité, et sa félicité s'étendra au-delà des » siècles, si, comme on n'en peut douter, il existe un Dieu rémunérateur. »

Il me reste à parler de ce Livre, des raisons qui l'ont fait entreprendre et qui m'engagent à le publier. Ce sont les leçons du cours de géodésie qui sont mises en ordre dans l'ouvrage que j'offre ici aux Géomètres chargés du cadastre : elles contiennent l'ensemble des théories dont les instructions du Ministre exigent l'application, soit pour obtenir rigoureusement les résultats de la grande triangulation des communes, soit pour en déduire les distances des points remarquables à la méridienne des chefs-lieux ainsi qu'à celle de Paris, soit enfin pour appliquer ces résultats aux détails topographiques.

Ce travail n'était d'abord destiné qu'à composer les notes qui accompagnent le *Développement* rapporté dans ce Manuel; mais, le grand nombre des matières ayant surpassé de beaucoup l'étendue qu'il convient de donner à de simples notes, on ne conserva sous ce titre que celles qui sont imprimées à la suite du Développement, et l'on en détacha tout ce qui parut n'être pas immédiatement essentiel à l'intelligence du texte. Ce complément forme, sous la dénomination de *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, un traité élémentaire que peuvent consulter les Ingénieurs-vérificateurs et les Géomètres secondaires, pour se diriger dans l'art des observations, dans l'application des diverses formules dont elles donnent les élémens, ou dans la confection des cahiers de calculs suivant la forme prescrite par les ordres du Ministre.

Le Manuel est précédé des Instructions officielles auxquelles il se rapporte, et divisé en quatre chapitres. Le premier renferme la trigonométrie rectiligne; il comprend tout ce qu'il est important de connaître sur la

construction des triangles, sur leur résolution générale, leur calcul, et la formation des tables des lignes trigonométriques. M. *Reynaud*, qui s'est chargé de cet article, a sur-tout insisté sur l'application des formules à des exemples numériques. La plupart des calculs relatifs aux opérations de détail du cadastre n'exigent le plus souvent que l'emploi des tables de logarithmes à cinq décimales; et dans les exemples qu'il a choisis, M. *Reynaud* ne s'est pas proposé d'atteindre une plus grande approximation : cependant, pour ne rien laisser à desirer sur les moyens d'obtenir une rigoureuse exactitude, j'ai terminé ce premier chapitre par un supplément que l'on peut lire *n.° 85 et suivans*, où, tous les cas de la résolution générale étant appliqués à un triangle dont les côtés sont exprimés par de grands nombres et les angles estimés en secondes, il a fallu faire usage de logarithmes poussés jusqu'au huitième ordre décimal, et corriger par les règles connues ceux qui auraient pu introduire dans les résultats des erreurs supérieures à ce degré. J'ai rapporté aussi plusieurs formules que l'on ne trouve pas exposées dans le Traité de trigonométrie, mais qu'il est facile d'en déduire.

Le second chapitre a pour objet la trigonométrie sphérique. Les principes de la résolution générale des triangles formés par l'intersection de trois grands cercles d'une même sphère, sont rarement utiles dans le levé du plan des territoires d'une médiocre étendue; mais ils trouvent leur application dans la triangulation de premier ordre, et dans la démonstration de plusieurs formules auxquelles les Géomètres ont quelquefois besoin de recourir, pour rapporter les angles ou les lignes qui sont les résultats immédiats de leurs observations et de leurs mesures, sous les dimensions qu'ils doivent conserver dans le tracé graphique. La réduction des angles à l'horizon, la détermination de la longitude et de la latitude des points terrestres, ainsi que les calculs qui conduisent à estimer leurs distances, ou qui servent à les fixer sur une grande surface, en les rapportant à la méridienne d'un chef-lieu et à sa perpendiculaire, sont autant de problèmes dont la solution dépend des règles de la trigonométrie sphérique : il a donc été nécessaire de la comprendre dans ce Manuel, afin de ne pas obliger le lecteur de recourir à d'autres traités pour l'intelligence du chapitre troisième. Mais en même temps j'ai pensé que, dans un ouvrage de cette espèce, il convenait de faire un usage modéré des procédés et des artifices de l'algèbre, en faveur de ceux qui ne sont pas très-familiarisés avec les transformations analytiques; c'est pourquoi j'ai cherché à n'employer dans la démonstration

des divers théorèmes qui servent de base à la résolution des triangles sphériques, que de simples constructions de géométrie, en conservant néanmoins, par cette voie, à la plupart des formules, la forme logarithmique qu'elles doivent affecter pour les applications numériques. Si je parais m'être éloigné de ce plan, en présentant le développement en séries du sinus et du cosinus d'un arc, c'est que dans plusieurs recherches j'ai tiré de ces suites beaucoup d'avantages, et qu'elles sont indispensables pour l'intelligence du beau théorème de M. *Legendre* sur les triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de leurs sphères. Cette proposition remarquable consacre un fait géométrique aussi intéressant en théorie qu'utile dans ses applications, par la conséquence importante que la pratique en déduit.

Le chapitre troisième traite de la géodésie. Forcé par le plan de cet ouvrage à me borner aux élémens de cette science, je me suis principalement attaché à éclaircir, par beaucoup de développemens et par de fréquentes applications numériques, les formules les plus usuelles. La description des instrumens propres à l'observation des angles, et la construction attribuée à *Nonius* pour l'estimation de la valeur des arcs moindres que la plus petite division du limbe, font la matière du second paragraphe : le premier est rempli par des considérations générales sur l'ensemble des opérations géodésiques.

Dans le troisième, j'expose la méthode de M. *Delambre* pour réduire un angle au centre de la station, et j'en discute avec détail les principales modifications.

Le quatrième et le cinquième paragraphes présentent les calculs relatifs à la réduction des angles à l'horizon, ainsi que les soins et les corrections qu'il faut apporter dans la mesure des bases.

Le sixième, et le plus étendu, comprend toutes les notions préliminaires qui éclairent le problème des longitudes et des latitudes. En parlant des arcs sur lesquels on compte les latitudes, j'ai été conduit à présenter les divers procédés que peuvent employer les Ingénieurs du cadastre pour déterminer avec exactitude la direction d'une ligne méridienne. J'ai donné les formules qui conduisent à estimer la distance itinéraire de deux points terrestres; et j'ai particulièrement insisté sur la méthode employée par *Cassini* pour rattacher le sommet des triangles qui couvrent un grand territoire, à la méridienne d'un chef-lieu et à sa perpendiculaire. Ce paragraphe

est

est terminé par plusieurs exemples, entre autres par le calcul de la distance de *Turin* à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire, connaissant la latitude et la longitude de cette ville, et par quelques considérations sur la boussole.

Dans le quatrième chapitre, consacré à donner les connaissances pratiques qui doivent être familières aux Ingénieurs du cadastre, on trouvera, sur les instructions en usage dans les opérations topographiques, des détails destinés à compléter les notions contenues sur cet objet dans le *Développement des Instructions* du Ministre. J'ai suivi, pour la distribution des onze paragraphes qui forment les divers articles de ce chapitre, la division observée dans un projet d'Instruction rédigé par M. *Hochard*, employé aux bureaux du cadastre. Cette pièce, dont on retrouve en partie les principales dispositions dans l'arrêté du 20 avril, m'a servi de modèle et d'exemple, tant pour l'ordre des matières que pour la netteté de la rédaction. J'ai complété le problème déjà traité dans le chapitre précédent, sur la fixation des points d'une carte par leur rapport à une méridienne et à sa perpendiculaire. Quand les points sont peu éloignés de ces deux axes, les calculs reçoivent de grandes simplifications, et ne dépendent plus alors que des principes de la trigonométrie rectiligne. On trouvera la construction des échelles et la nomenclature de celles qui sont ordonnées, ainsi qu'une table pour convertir les toises en mètres, et reciproquement. J'ai rapporté les principales formules relatives à l'évaluation de surfaces agraires. Enfin j'ai présenté tous les travaux d'un plan fictif, afin d'avoir par-là l'occasion d'offrir aux Ingénieurs-vérificateurs et aux Géomètres du cadastre l'ensemble et la forme des registres, des cahiers de calculs, des procès-verbaux, tableaux indicatifs et bulletins qu'ils doivent tenir pour confectionner le plan d'une commune et sa vérification. J'ai suivi pour ces modèles les ordres prescrits par le Ministre, et le texte des instructions et des arrêtés, dont la collection a été publiée par M. *Oyon*, chef des bureaux du cadastre (*).

J'ai regretté que la destination de ce Manuel ne me permît pas de faire connaître l'état actuel de la géodésie, et de présenter les savantes théories qui ont porté cette science à la hauteur où nous la voyons parvenue. Après avoir donné les préceptes élémentaires et leurs principales applications, il

(*) La collection des lois, arrêtés et circulaires relatifs à l'arpentage et à l'expertise des communes, se trouve chez *Rondonneau*, au dépôt des lois, place du Palais de justice, n.° 1.

m'eût été agréable d'arriver à des considérations plus élevées, et de trouver pour dédommagement le plaisir d'exposer, sur cette matière, les travaux célèbres de MM. *Laplace*, *Legendre*, *Delambre* et *Lacroix* : mais de plus longs détails m'auraient entraîné hors des limites qui m'étaient prescrites ; et cette entreprise ayant été exécutée avec succès par M. *Puissant*, je dois engager les Ingénieurs du cadastre qui desirent acquérir des connaissances ultérieures, à consulter le Traité publié par ce géomètre ; ils y liront les écrits de nos grands maîtres rapportés avec ordre, et accompagnés d'utiles développemens.

M. *Hautier*, qui devait rédiger quelques parties de cet ouvrage, fut détourné de ce travail par la vérification des bulletins de la grande triangulation de *Cassini*. Cette révision l'occupa tout entier, et je restai seul chargé des trois derniers chapitres. J'ai pu à peine, dans le court espace de temps qui me fut accordé, rassembler et coordonner ces matériaux; et malgré les efforts que j'ai faits pour les présenter avec méthode, et pour remplir, à cet égard, les intentions du Ministre et l'attente de M. le Commissaire impérial, je ne me dissimule aucune des imperfections de cet ouvrage, et je sens qu'il est plus facile de montrer du zèle que du talent.

Je prie MM. les Ingénieurs-vérificateurs, MM. les Géomètres du cadastre et leurs collaborateurs, pour qui cet essai a été entrepris, de me faire part des améliorations dont ils le jugeront susceptible. Je réclame particulièrement ce témoignage d'intérêt des Ingénieurs de tout grade que j'ai formés et que j'ai eu l'avantage d'attacher à ce service public. Répandus dans toutes les communes de l'Empire, ils peuvent facilement me donner des détails utiles sur une foule de difficultés que l'on rencontre dans la pratique, et qui naissent des localités. De ce nombre sont plusieurs Ingénieurs en chef, pour la plupart anciens élèves de l'École polytechnique. Je leur dois déjà des renseignemens, dont je me suis empressé de faire usage ; et je recevrai avec une égale reconnaissance les nouvelles observations qu'ils voudront bien m'adresser, et que leur dictera une critique judicieuse, éclairée par l'expérience.

M.[l] P.

INSTRUCTION

POUR LES ARPENTAGES PARCELLAIRES.

TITRE I.er

De l'Exécution du Parcellaire.

ARTICLE 1.er

L'ARPENTAGE parcellaire s'exécute d'après une triangulation et un plan linéaire qui présente la circonscription de la commune, les principaux chemins, les montagnes, rivières, la position des chefs-lieux et hameaux, la division des sections, leurs subdivisions si elles en sont susceptibles, et les forêts impériales et communales.

2. Le parcellaire se compose d'autant de feuilles qu'il y a de sections dans la commune, ou, si les sections sont trop étendues, de subdivisions de sections. Le nombre de ces feuilles est déterminé par le Géomètre en chef, qui prend la dénomination d'*Ingénieur-vérificateur du cadastre;* il en est formé un atlas, en tête duquel doit se trouver un tableau d'assemblage ou plan général de la commune, ne présentant d'autres détails que ceux spécifiés en l'article précédent.

3. Le tableau d'assemblage doit être à l'échelle d'un sur le papier à 5000 sur le terrain, si la commune n'excède pas 1200 arpens métriques;

D'un à 10,000, depuis 1200 jusqu'à 3000 arpens;

Et d'un à 20,000 pour les communes dont le territoire excède 3000 arpens;

De manière que ce plan puisse, dans tous les cas, tenir sur une feuille de papier grand-aigle.

4. Les plans parcellaires sont rapportés sur l'échelle d'un à 5000, et sur celle d'un à 2500, selon que le Préfet le détermine pour chaque commune ou portion de commune, d'après la proposition de l'Ingénieur-vérificateur, et sur le rapport du directeur des contributions.

5. L'Ingénieur-vérificateur réside dans le chef-lieu du département, et ne peut exercer d'autres fonctions; il examine tous les sujets qui se présentent pour être Géomètres du cadastre, et donne une attestation de capacité à ceux auxquels il aura reconnu les talens nécessaires.

6. Ceux-ci, d'après cette attestation et sur le rapport du directeur des contributions, reçoivent du Préfet une commission de Géomètre du cadastre, si ce magistrat les en juge d'ailleurs susceptibles.

7. L'Ingénieur-vérificateur place les Géomètres commissionnés dans les communes désignées par le Préfet sur le rapport du directeur. Il dirige et surveille leurs travaux et leur conduite.

8. Il vérifie par lui-même, ou par un employé de confiance, dont il est responsable, toutes les opérations des Géomètres, dresse un procès-verbal sommaire de cette vérification, et le remet au directeur des contributions, qui en rend compte au Préfet.

9. Il est, en outre, chargé de la rédaction et expédition de tous les travaux du parcellaire qui peuvent se faire dans le cabinet; savoir :

Le calcul des contenances;

Le tableau indicatif des propriétaires, des propriétés et de leurs contenances;

Les bulletins ou relevés, en double expédition, des articles qui concernent chaque propriétaire, dont il sera parlé ci-après, et dont le modèle est ci-annexé;

Les deux copies de l'atlas et de son tableau d'assemblage.

10. Les Géomètres du cadastre nommés par le Préfet, d'après l'attestation de l'Ingénieur-vérificateur et sur le rapport du directeur, sont chargés de la délimitation de la commune, de sa division en sections, conformément aux instructions données à cet égard pour les anciens plans de masses, de la triangulation, du plan linéaire, du plan parcellaire, et de la minute du tableau indicatif des propriétaires et des propriétés.

11. Ils peuvent s'adjoindre des arpenteurs pour le levé du détail, et en demeurent responsables. Les arpenteurs doivent être agréés par l'Ingénieur-vérificateur, et les traités passés entre les Géomètres et les arpenteurs adjoints doivent être par lui approuvés.

12. La tolérance pour les mesures linéaires est d'un centième, et, pour les mesures de surface, d'un cinquantième.

13. L'Ingénieur-vérificateur peut proposer la révocation des Géomètres dont les travaux ou la conduite donnent lieu à quelques reproches. Cette révocation est prononcée par le Préfet, sur le rapport du directeur.

14. Aussitôt que le Géomètre chargé de l'arpentage d'une commune a terminé la délimitation, la division des sections, la triangulation et autres travaux préparatoires, le Préfet, sur le compte qui lui en est rendu par le directeur des contributions, charge, par un arrêté spécial, le Maire de la commune, de faire publier, sur la demande du Géomètre, l'avis aux propriétaires, du jour où les travaux du parcellaire devront s'exécuter, afin qu'ils assistent, par eux ou par leurs fermiers, régisseurs ou

autres représentans, à l'arpentage de leurs propriétés, et qu'ils fournissent tous les renseignemens nécessaires.

15. Lorsqu'une portion de terrain est contestée par deux ou plusieurs propriétaires, le Géomètre les appelle et cherche à les concilier à l'amiable, de manière à assigner à chacun sa part dans cette portion.

En cas de non-conciliation, s'il y a sur le terrain des limites apparentes, le Géomètre les figure sur le plan par des lignes ponctuées, assignant à chacun la partie qui paraît lui appartenir au moment de l'arpentage; sauf, si les parties font juger leur contestation avant l'entière confection du plan, à le rectifier, ainsi que le tableau indicatif, d'après le jugement.

S'il n'y a point de limites apparentes, le Géomètre ne fait qu'une parcelle de toute la portion en litige: il porte néanmoins autant de numéros qu'il y a de propriétaires prétendans; il porte de même sur le tableau indicatif les noms de tous les propriétaires, sauf à diviser la contenance totale entre eux, d'après le jugement de la contestation. Dans tous les cas, les opérations ne peuvent éprouver aucun retard.

16. Lorsque, dans un bois impérial ou communal, il existe des portions appartenant à des particuliers, le Géomètre se fait autoriser, conformément aux réglemens relatifs à l'administration générale des forêts, à ouvrir les laies reconnues indispensables.

17. Lorsqu'un bois se divise entre plusieurs particuliers, ils sont invités à consentir à l'ouverture des laies nécessaires; à moins qu'ils ne préfèrent de déclarer la quantité appartenant à chacun d'eux, de manière que les contenances partielles cadrent avec la contenance totale donnée par le plan, et que le Géomètre puisse figurer sur le plan la portion de chacun.

Dans le cas d'ouverture des laies, les abatages appartiennent

aux propriétaires, les frais d'ouverture étant à la charge des Géomètres.

Dans le cas de contestation ou d'incertitude, le Géomètre suivra les dispositions de l'article 15 ci-dessus.

18. Un indicateur fourni par le maire de la commune, un jour de chaque semaine seulement, indique les noms, surnoms, professions et demeures des propriétaires des diverses parcelles.

19. Lorsqu'une portion ou division de section est arpentée parcellairement, le Géomètre se rend, le dimanche suivant, ou tout autre jour convenable, à la mairie, où le maire appelle les propriétaires qui ont des biens dans cette portion, à l'effet de reconnaître les propriétés portées sous leurs noms; et, d'après leurs observations, le Géomètre rectifie et complète le tableau indicatif de cette partie de la commune.

20. Lorsque tous les travaux de l'arpentage sont terminés, ainsi que la minute du tableau indicatif, le Géomètre fait parvenir le tout à l'Ingénieur-vérificateur.

21. Celui-ci fait alors le calcul des contenances, les porte sur la copie du tableau indicatif, et rédige ensuite un bulletin, dans lequel il réunit, sous le nom de chaque propriétaire, et par sections, toutes les propriétés éparses dans le tableau indicatif. Ces bulletins sont faits en double expédition.

22. Il remet ensuite une expédition des bulletins au directeur, qui les fait passer au maire de la commune.

23. Le maire les fait distribuer à tous les propriétaires, avec invitation de les examiner et de les lui renvoyer, en y joignant leurs observations, s'il y a lieu.

24. Les propriétaires, leurs fermiers ou représentans, ont un mois pour examiner leurs bulletins et les renvoyer avec leur adhésion, ou leurs réclamations s'ils en ont à former.

25. Le Maire peut également réclamer relativement aux biens communaux.

26. S'il y a des réclamations, le Préfet charge l'Ingénieur-vérificateur de s'assurer d'abord si l'objet de la réclamation ne provient pas d'une erreur de calcul.

Dans le cas contraire, le réclamant peut requérir le réarpentage par un autre Géomètre ou arpenteur, à ses frais, si sa réclamation ne se trouve pas fondée; aux frais du Géomètre qui a levé le plan, si l'erreur provient de son fait. Il est dressé procès-verbal de cette opération.

27. Les tableaux indicatifs et bulletins sont rédigés en mesures métriques. En tête de chaque tableau et bulletin, le rapport de ces mesures métriques aux diverses mesures locales de la commune est exprimé. Ce même rapport est, en outre, exprimé approximativement dans les bulletins en fractions simples; et le total des contenances réunies est converti en mesures locales.

28. L'Ingénieur-vérificateur dépose à la direction les bulletins revenus de la communication, et les doubles de ceux qui n'auront pas été renvoyés, la copie bien rectifiée du tableau indicatif, et les deux copies de l'atlas, une pour le département, laquelle reste provisoirement à la direction, et l'autre pour la commune. Chaque copie de l'atlas est précédée du tableau d'assemblage; un calque de ce tableau d'assemblage est envoyé au ministère des finances.

29. Aussitôt après la remise de ces pièces, le Préfet donne les ordres pour faire commencer les opérations du classement et de la matrice de rôle.

TITRE II.

Du Paiement de la Dépense.

ART. 1.er L'ATTRIBUTION précédemment réglée en faveur du Géomètre

Géomètre en chef, est convertie en une somme fixe, payable par mois, et en une rétribution variable, tant pour la vérification des opérations sur le terrain, que pour l'expédition des travaux du cabinet.

2. La partie fixe est de 4000 fr. dans les départemens qui sont de première classe, pour la direction des contributions;

De 3500 fr. dans les départemens de seconde classe,

Et de 3000 fr. dans ceux de troisième classe.

La rétribution variable est réglée par le Préfet, suivant les localités, sans toutefois qu'elle puisse excéder 31 centimes par arpent, et 11 centimes par propriété parcellée.

3. La rétribution des Géomètres du cadastre est réglée par le Préfet, suivant les localités, et de manière qu'elle ne puisse excéder un franc par arpent, et 25 centimes par parcelle de propriété.

4. Toute parcelle ou numéro du plan parcellaire qui contient plus de vingt-cinq arpens métriques, quoique divisés par des chemins ou ruisseaux, ne peut être payée au Géomètre au-delà de 30 centimes par arpent ; le paiement par parcelle demeurant au surplus le même.

5. Pour les communes pour lesquelles il a déjà été fait des plans de masses, le Géomètre ne peut recevoir que les trois quarts du prix par arpent réglé par l'article 3 ci-dessus, le paiement par parcelle demeurant le même; et pour les communes dont les trois copies du plan de masses ont déjà été dessinées à Paris, l'Ingénieur-vérificateur ne reçoit point les 5 centimes alloués pour les tableaux d'assemblage.

6. Dans les communes déjà arpentées en masses, il n'est rien payé *par arpent*, pour toute parcelle excédant vingt-cinq arpens métriques; le Géomètre ne reçoit que l'attribution réglée par parcelle.

7. La rétribution variable de l'Ingénieur-vérificateur lui sera payée dans les proportions suivantes :

Un quart au moment où il aura placé un Géomètre dans chacune des communes désignées pour l'arpentage ;

Un quart lorsque le Géomètre aura remis le parcellaire, pour être calculé, et la minute du tableau indicatif, ainsi que le procès-verbal de la délimitation, et que, de son côté, l'Ingénieur-vérificateur aura remis au directeur le procès-verbal de vérification ;

Un quart lorsque l'Ingénieur-vérificateur aura remis à la direction la minute du plan, le tableau indicatif et les bulletins des propriétaires ;

Enfin le dernier quart, ou le solde, après que, toutes les réclamations étant jugées, l'expertise et la matrice de rôle expédiées, le travail sera entièrement terminé, et qu'il ne restera aucun doute sur son exactitude.

8. Les Géomètres du cadastre recevront, tous les mois, sur la proposition de l'Ingénieur-vérificateur et le rapport du directeur, un à-compte qui ne pourra excéder 100 fr. par commune.

Lorsqu'un Géomètre aura remis la minute du parcellaire, celle du tableau indicatif et les autres pièces à l'Ingénieur-vérificateur, il recevra, toujours sur la proposition de ce dernier et le rapport du directeur, la somme qui, avec les à-comptes déjà reçus, formera les trois quarts de son indemnité totale.

Le dernier quart lui sera payé après l'expédition de l'expertise et de la matrice de rôle.

Paris, le 1.er Décembre 1807.

Le Ministre des finances, GAUDIN.

INSTRUCTION PRATIQUE

POUR LES GÉOMÈTRES DU CADASTRE,

Sur la Rédaction du Tableau indicatif des Propriétaires et des Propriétés ;

APPROUVÉE PAR LE MINISTRE DES FINANCES LE 20 AVRIL 1808.

L'INSTRUCTION du 1.er décembre 1807 sur les arpentages parcellaires explique clairement la manière dont ces opérations doivent être exécutées. L'expérience d'une année mettra à même de connaître les développemens qu'il serait utile d'y ajouter.

Les articles 3 et 4, relatifs aux échelles des plans, ont paru présenter quelque incertitude : le tableau d'assemblage doit toujours être rédigé sur une feuille de papier grand-aigle ; on doit adopter celle des trois échelles de 5, 10 ou 20,000 que la contenance ou la configuration de la commune exigera.

L'atlas parcellaire doit être à l'échelle d'un à 5000, lorsque les localités de la commune le permettent : si les propriétés sont plus morcelées, il faut adopter l'échelle d'un à 2500 ; et si cette échelle est encore trop petite pour quelques portions de territoire très-divisées, il faut développer ces portions sur des feuilles séparées à l'échelle d'un à 1250.

Chaque feuille d'atlas doit, en général, comprendre une section : si les sections étaient très-petites, on pourrait en mettre deux sur la même feuille ; si, au contraire, la section est trop étendue, on la partage en deux ou plusieurs feuilles.

Il peut arriver que la plus grande partie d'une commune se prête à l'échelle d'un à 5000, qu'une autre partie exige l'échelle

d'un à 2500, et que quelques portions ne puissent se rendre qu'à l'échelle d'un à 1250.

Alors le Préfet déterminera, en général, sur la proposition du directeur des contributions et de l'Ingénieur-vérificateur, si l'on emploiera exclusivement la seule échelle de 5000 ou de 2500 pour toute la commune, ou s'il est plus avantageux de se servir des trois échelles. Dans ce cas, chaque feuille devra indiquer à quelle échelle elle est rapportée.

Néanmoins si, lorsque l'échelle d'un à 5000 ou à 2500 aura été adoptée pour une commune, le Géomètre trouve une portion de territoire qui exige plus de développement, il pourra adopter l'échelle d'un à 1250, sauf à obtenir, après coup, l'approbation du Préfet.

Les propriétés bâties dans des villes ou faubourgs continueront d'être levées par masses d'îlots. Chaque îlot, y compris les jardins de pur agrément, sera considéré comme une parcelle; les églises et les monumens ou édifices publics devront toujours être distingués.

Les grands jardins, les marais légumiers, devront être levés distinctement, de même que toutes les autres natures de propriétés non bâties.

Les maisons des bourgs, villages et hameaux, seront détaillées; mais on ne fera qu'une seule et même parcelle de l'habitation, de la cour et des bâtimens ruraux.

Le Géomètre n'est pas tenu de lever et de figurer sur son plan les détails des parcs ou jardins de plaisance fermés de murs; mais il doit distinguer les bâtimens d'habitation qui s'y trouvent.

Les rues, les places publiques, les grandes routes, les chemins vicinaux, les rivières, et généralement tous les objets non imposables, seront levés et décrits avec exactitude.

On pourra figurer approximativement, et par des lignes,

ponctuées, les chemins et sentiers qui font partie intégrante des propriétés.

Les terrains momentanément incultes par suite de la mort du précédent propriétaire, par l'effet d'un procès ou par toute autre cause, seront, d'après l'avis du Maire et de l'indicateur, portés à raison du genre de culture qu'ils avaient précédemment.

Les masses de cultures de l'atlas parcellaire seront coloriées des mêmes teintes que celles employées dans les copies des plans de masses dessinées à Paris, et renvoyées dans les départemens. Ces copies seront consultées pour modèles des écritures.

Le tableau d'assemblage ne sera colorié que comme l'étaient les calques des plans par masses de cultures.

On entend par *parcelle*, toute propriété ou portion de propriété qui présente une seule nature de culture. Toutefois, un champ où il y aurait deux cultures mêlées, comme un pré dans lequel seraient plantés des arbres, ne formera qu'une seule parcelle. Le Géomètre le portera d'après la culture principale, et indiquera en note la culture accessoire.

On entend également par *parcelle*, chaque portion qui, dans une propriété de même culture, se trouve divisée par des haies, fossés ou autres limites fixes : ainsi deux prés contigus, mais bien distincts par leurs limites, font deux parcelles, quoiqu'appartenant au même propriétaire.

Le tableau indicatif sera rédigé dans la forme du modèle ci-joint : il en sera remis, pour chaque commune, un exemplaire au Géomètre chargé du cadastre.

Il ne se servira point de ce cadre sur le terrain; mais il tracera à la main, sur du papier blanc d'un format plus petit, les cinq premières colonnes seulement, en leur donnant plus de largeur.

Ce cadre à la main sera la minute qu'il remplira sur le terrain. L'opération finie, il le recopiera sur le cadre imprimé.

Dans la seconde colonne, le Géomètre donnera à chacune des parcelles qu'il aura d'abord trouvées, un numéro provisoire. Si, par la suite, en rectifiant son premier travail, il est obligé de diviser une parcelle qu'il aurait crue d'abord appartenir à un seul propriétaire, ou de réunir deux parcelles qu'il aurait distinguées mal-à-propos, lorsqu'enfin le nombre et l'ordre des parcelles sera bien fixé, il portera les numéros définitifs dans la troisième colonne, et rayera ceux de la seconde devenus inutiles.

Il aura soin de ne porter qu'en crayon ou en encre de couleur sur le plan les numéros provisoires, et y portera ensuite en encre noire les numéros définitifs.

C'est l'Ingénieur-vérificateur qui remplit les deux colonnes des contenances; il porte en encre de couleur les contenances des objets non imposables, afin de faciliter sa récapitulation.

La dernière colonne, dont le titre est en blanc, peut servir aux observations du Géomètre ou de l'Ingénieur-vérificateur, pour indiquer, par exemple, qu'un pré est planté d'arbres, que sous un champ se trouve une cave, &c.; mais ces notes devront être très-concises.

Ce tableau indicatif, complété, comme il vient d'être dit, par l'Ingénieur-vérificateur, sera remis au directeur, qui l'enverra au contrôleur chargé de l'expertise, et l'expert pourra se servir de la dernière colonne pour la minute de son état de classement.

La plus grande difficulté que pourra rencontrer le Géomètre, est celle de parvenir à la juste division des propriétés et à la connaissance des propriétaires.

Il ne faut pas perdre de vue que le Géomètre chargé du parcellaire passe nécessairement plusieurs mois dans la commune;

réside au milieu des habitans, et a naturellement avec eux de fréquens rapports.

Il doit d'abord les éclairer sur le grand intérêt qu'ils ont à ce que leur parcellaire soit bien exécuté : sous le rapport de l'égalité de la répartition, il leur serait déjà très-utile; mais il leur offre un avantage plus précieux encore, celui de délimiter et fixer invariablement leurs propriétés, d'éviter une foule de contestations et de procès souvent dispendieux. Un extrait de l'atlas, qu'un propriétaire acquerrait pour un prix très-modique, peut devenir pour lui un terrier aussi parfait que l'étaient ceux que les anciens seigneurs faisaient exécuter à grands frais.

Bien convaincus de ces vérités, que le Géomètre doit leur répéter souvent, les propriétaires s'empresseront eux-mêmes à saisir cette occasion unique d'assurer leurs droits, et de donner à leurs possessions des titres incontestables et permanens. En Savoie et en Piémont, les procès relatifs aux contenances des propriétés se décidaient sur de simples extraits du cadastre.

Lorsque le Géomètre a fini ses opérations préliminaires et choisi la portion de territoire qu'il veut parceller, il en donne avis au Maire, qui en prévient les habitans, en invitant ceux-ci à assister à l'arpentage de leurs propriétés, et à représenter leurs titres, pour faciliter au Géomètre la connaissance de la portion de terrain qui appartient à chacun d'eux.

Deux ou trois propriétaires suffisent souvent pour fournir beaucoup de lumières au Géomètre, parce que la circonscription de leurs propriétés donne déjà une partie de celle des terrains contigus.

Mais, aucun propriétaire ne se rendît-il sur le terrain, le Géomètre doit toujours procéder à ses opérations. Il suffira que, par la suite, un ou deux donnent l'exemple pour éclairer les autres sur leurs véritables intérêts.

Il est impossible qu'un Géomètre achève le parcellaire d'une portion de terrain, sans que l'intérêt, la curiosité ou le hasard, amènent auprès de lui quelques habitans. Il doit profiter de toutes ces circonstances pour prendre des informations sur les noms des propriétaires, et les coter en crayon sur la minute de son tableau indicatif.

Cette portion parcellée, le Géomètre requiert le Maire de lui fournir un indicateur. Il est inutile, en effet, que cet indicateur le suive dans tous ses travaux; il suffit que, parcourant avec lui la portion parcellée, il lui indique à mesure les noms, professions et demeures des propriétaires, qu'il inscrit aussitôt.

Il sera très-utile au Géomètre de faire d'avance une liste alphabétique des noms, prénoms, professions et demeures des propriétaires de la commune; il pourra en faire le relevé sur le rôle de la contribution foncière, dont il est autorisé à requérir la communication sans déplacement : cette liste facilitera son travail et préviendra beaucoup d'erreurs.

L'article 18 de l'Instruction du 1.er décembre 1807 charge le Maire de fournir un indicateur par semaine. Le sens de cet article est que, si un Géomètre passe dans la commune quatre mois ou seize à dix-sept semaines, il a rigoureusement droit à seize ou dix-sept journées d'indicateur; mais il les prend aux époques où ils lui sont utiles : s'il ne s'en sert pas dans une semaine, il en prend deux dans la suivante.

Le Maire de la commune, étant ordinairement un des plus notables habitans, attachera nécessairement quelque prix à ce qu'une importante opération, faite sous sa mairie, soit bien exécutée; il ne voudra pas que l'on puisse lui reprocher un jour d'avoir négligé un parcellaire sur l'atlas duquel son nom sera inscrit, et que les communes voisines puissent se vanter d'avoir un cadastre plus parfait que le sien : il s'empressera de fournir au Géomètre

Géomètre tous les indicateurs véritablement nécessaires, et tous les autres secours qui dépendront de lui.

Le tableau indicatif, rempli, pour la portion parcellée, d'après les dires de l'indicateur, sera peut-être encore incomplet et fautif. Le Géomètre requiert alors le Maire d'inviter les propriétaires à venir en prendre connaissance à la mairie; là, ceux qui s'y rendent font rectifier leurs articles, et, par ce fait même, les articles de leurs voisins.

Tels sont les divers moyens que le Géomètre emploie pour parvenir à la rédaction du tableau indicatif, conformément au modèle joint à la présente Instruction. Un séjour de plusieurs mois, une résidence continuelle, le familiarisent nécessairement avec le territoire qu'il arpente; il finit par acquérir des connaissances détaillées de toutes les propriétés; et ce qui, dans le principe, paraissait hérissé de difficultés, finit par devenir très-facile.

Enfin, lorsque le travail sur le terrain sera fini et vérifié, la communication, aux propriétaires, des bulletins où sont détaillées toutes leurs propriétés, viendra achever de faire disparaître jusqu'aux plus légères erreurs. Le Géomètre, avant de quitter la commune, préviendra le Maire et les propriétaires de quelle importance il est pour eux d'examiner soigneusement ces bulletins, et d'y faire leurs observations. L'Ingénieur-vérificateur, en faisant ses vérifications, leur renouvellera cette invitation.

Les bulletins sont, à la vérité, rédigés en nouvelles mesures; diverses considérations y ont déterminé : d'abord, il importe de propager le nouveau système, reconnu si utile; ensuite la double indication des anciennes et nouvelles mesures aurait beaucoup augmenté le travail et la dépense.

Cet inconvénient est atténué par le soin que l'on a pris d'indiquer, en tête des bulletins, le rapport rigoureux des mesures nouvelles avec les mesures usitées dans la commune, et, de plus, le

rapport approximatif en fractions simples, et enfin en donnant en anciennes mesures la totalité des contenances de chaque propriétaire.

Le Géomètre doit profiter de son séjour dans la commune, pour familiariser les habitans avec les nouvelles mesures : il y trouvera d'autant plus de facilité, que ce qui rebutait l'habitant des campagnes, c'étaient les noms scientifiques. Le Gouvernement a permis l'usage des noms vulgaires ; ce sont les seuls employés dans le cadastre : il suffit que le Géomètre donne aux propriétaires une idée du rapport qui existe entre l'arpent métrique ou plutôt le nouvel arpent, la nouvelle perche et le mètre, avec le journal, l'arpent, la setérée, la bécherée, la verge, le jallois, ou telle autre mesure précédemment usitée dans la commune.

Le Géomètre doit encore les éclairer sur un point essentiel. Il leur expliquera qu'il réduit tout à l'horizon ; qu'il mesure les terres en pente comme si elles étaient planes, et que dès-lors ils ne doivent pas s'étonner et s'inquiéter si le parcellaire donne à un terrain incliné un peu moins d'étendue qu'il n'en a sur le titre du propriétaire.

Un propriétaire, par exemple, a acquis un champ porté sur son contrat pour un arpent quatre perches ; le parcellaire ne lui donne qu'un arpent : cette différence ne lui fait aucun tort. Survient-il par la suite une contestation, on mesure horizontalement un arpent, et l'on arrive juste au point où il arriverait en mesurant d'après l'inclinaison un arpent quatre perches ; son titre et le cadastre cadrent parfaitement.

C'est ce que le Géomètre leur rendra sensible par quelques exemples. Il les préviendra donc que s'ils ne trouvent sur leurs bulletins que ces légères différences, indépendamment même de la tolérance permise, ils ne doivent pas faire d'observations ou

de réclamations, ni exiger un réarpentage dont les frais seraient à leur charge.

Les incertitudes ou les contestations de terrains prévues par les articles 15 et 17, présenteront des difficultés plus réelles. Le Géomètre cherchera, autant qu'il lui sera possible, à concilier les parties à l'amiable, et les propriétaires aimeront souvent à faire juger sans frais un procès qui pourrait devenir dispendieux; ils pourraient encore s'en rapporter à des arbitres qu'ils choisiraient. Si la conciliation ne réussit pas, il engagera les parties à se pourvoir devant les tribunaux, et en informera l'Ingénieur-vérificateur. Le directeur en rendra compte au Préfet, qui invitera le tribunal à accélérer son jugement, lequel pourra être rendu avant que le Géomètre quitte la commune.

Si le procès se prolonge au-delà de ce terme, le Géomètre laissera en suspens le terrain litigieux, sauf à retourner dans la commune, pour conformer le plan au jugement du tribunal, et ce aux frais des deux parties.

Le succès du cadastre dépend donc, non-seulement du talent, mais encore de la conduite du Géomètre : il doit s'attacher à gagner l'estime et la confiance du Maire et des habitans. L'Ingénieur-vérificateur a trop d'intérêt à ce que le travail soit régulier, pour ne point donner la plus sévère attention à l'examen et au choix des Géomètres, et pour négliger de se rendre fréquemment auprès d'eux. Il aura soin non-seulement de vérifier leurs opérations géodésiques, mais encore de s'informer de leur conduite: s'il reçoit des plaintes contre un Géomètre, s'il est instruit qu'il contracte des dettes, il en doit faire part au directeur, qui en rendra compte au Préfet.

Nul Géomètre ne peut s'absenter sans un congé accordé par le Préfet, sur le rapport du directeur, d'après la proposition de l'Ingénieur-vérificateur.

Il ne peut quitter le département où il est commissionné, pour passer dans un autre, sans un certificat de l'Ingénieur-vérificateur, visé du Préfet, énonçant qu'il est libre de tout engagement, et attestant sa capacité et sa bonne conduite.

C'est d'après le travail et la manière d'être du Géomètre, que l'Ingénieur-vérificateur pourra juger s'il doit proposer l'à-compte de 100 francs par mois, ou le refuser; s'il doit, dans une grande commune où le Géomètre aurait plusieurs collaborateurs, excéder ce taux.

Le Ministre se fait envoyer, à la fin de chaque trimestre, par le directeur des contributions, l'état nominatif des Géomètres de première classe, avec des notes sur leurs travaux et leur conduite. C'est parmi ceux d'entre eux qui se distingueront le plus, que seront choisis à l'avenir les Ingénieurs-vérificateurs, lorsque quelques-unes de ces places deviendront vacantes.

Le Préfet se fera de même rendre compte de la conduite et du travail des Géomètres de seconde classe, pour nommer Géomètres de première classe ceux qui en seront susceptibles, lorsque les travaux prendront plus d'extension.

Le Ministre des finances, GAUDIN.

MINISTÈRE

MINISTÈRE DES FINANCES.

CADASTRE DE LA FRANCE.

DÉVELOPPEMENT des Instructions sur l'Arpentage et le Levé des Plans des Communes, pour l'exécution du Cadastre ;

APPROUVÉ PAR LE MINISTRE.

PLAN GÉNÉRAL DE CE DÉVELOPPEMENT.

NOTES.

DÉVELOPPEMENT
DES INSTRUCTIONS

Sur l'Arpentage et le Levé des Plans des Communes, pour l'exécution du Cadastre de la France ;

APPROUVÉ PAR LE MINISTRE DES FINANCES

Le 30 Septembre 1806.

LES Instructions sur le levé des plans des communes ont été faites dans un temps où il ne s'agissait que de l'arpentage d'un petit nombre de territoires isolés ; elles exigent aujourd'hui quelques développemens pour être appliquées à l'exécution du cadastre de la France.

Les triangles de *Cassini* semblaient avoir été préparés pour confectionner ce grand travail.

Le rattachement à ces triangles devant établir l'harmonie de tous les canevas trigonométriques, il est nécessaire d'indiquer les moyens d'opérer ce rattachement. Son exactitude, ainsi que celle de tout le travail, dépend des procédés qu'on emploie, et des instrumens dont on fait usage. Il convient donc d'indiquer ceux qui méritent la préférence, en traitant trois points principaux :

1.° La triangulation qui doit précéder le levé du plan ;

2.° Les dispositions préparatoires pour le levé du plan ;

3.° L'application de la triangulation aux travaux de détail.

I.re PARTIE.

Triangulation qui doit précéder le Levé du Plan.

Les Instructions des 24 novembre 1802 (*Collection*, tome I.er, page 65) et 1.er mars 1803 (*Collection*, tome I.er, page 156) prescrivent le rattachement des opérations des Géomètres aux points indiqués par les chaînes des *grands triangles*, sur lesquelles reposent les travaux de la carte de France.

Il n'était alors question que de quelques communes désignées par le sort dans chaque département ; et l'isolement de ces communes présentait des difficultés, soit pour en lier les points entre eux, soit pour rattacher ces points aux sommets des *grands triangles*.

Ces difficultés ne subsistent plus depuis que, le levé des plans étant généralisé, on procède sur des territoires contigus, réunis par groupes de communes, dans l'une ou plusieurs desquelles il doit se trouver des points fixés par les *grands triangles* ; points que les Géomètres en chef sont à portée de reconnaître, au moyen des cartes et des bulletins de triangles qui leur ont été envoyés.

Mais les sommets de ces *grands triangles*, souvent trop éloignés du point où l'on opère pour être rappelés dans les travaux de détail, font desirer des triangles intermédiaires *.

* Les inexactitudes d'une grande partie des triangles du second et du troisième ordre de la carte de *Cassini*, qu'il n'avait pu mesurer lui-même, et la perte des cahiers d'observations et de calculs de ces triangles, laissent à desirer cette triangulation de second ordre.

L'exécution du grand canevas trigonométrique prescrit ci-après aux Géomètres en chef, devient donc d'une absolue nécessité.

L'harmonie générale de l'opération exige donc que les points principaux des communes formant la portion d'un arrondissement communal à arpenter dans l'année, soient liés entre eux et rattachés aux *grands triangles* par un canevas.

On voit que l'ensemble du travail préparatoire de la partie graphique du cadastre comporte nécessairement trois sortes de triangles; savoir,

1.° *Les grands triangles* ou triangles *du premier ordre*, qui ont été adressés aux Géomètres en chef, et qui forment la base des opérations;

2.° Les triangles qu'on appellera de *second ordre*, qui, rattachés aux premiers, lieront entre eux les points principaux de chaque groupe de communes à arpenter *;

---

* Ces triangles qu'on nomme ici de *second ordre*, ne doivent point être confondus avec ceux qui ont reçu la même dénomination dans les opérations de *Cassini;* puisque les triangles dont on entend parler, ayant pour objet, comme on vient de le dire, de lier entre eux les points principaux de chaque groupe de communes, ne sont que des triangles de *troisième ordre*, considérés relativement à ceux déterminés par *Cassini*.

En effet, dans les travaux de celui-ci et dans ceux de ses collaborateurs, on s'est occupé de déterminer,

1.° Les *grands triangles* dont on vient de parler, qui conservent ici la dénomination de *triangles du premier ordre ;*

2.° Des triangles qu'on a nommés, dans les opérations préparatoires de la grande carte de France, *triangles du second ordre*, et qui souvent rattachent entre eux des sommets de *grands triangles* que ne liaient point les premières observations : il n'est pas ici question de ces triangles nommés de *second ordre* dans les travaux de *Cassini*, parce que, quelques recherches qu'on ait faites, les manuscrits qui les contiennent n'ont pu être consultés ;

3.° Les triangles nommés, d'après *Cassini*, *triangles de troisième ordre*, et qui lient les chefs-lieux des communes entre eux : ce sont ces triangles qui forment la triangulation dite de *second ordre* dans cette Instruction.

3.° Enfin les triangles rattachés immédiatement, quand on le pourra, aux points des *grands triangles*, mais qui, indiquant toujours les points destinés à former les triangles du *second ordre*, composeront la triangulation particulière de chaque commune, lieront ces communes entre elles, et formeront les cadres de leurs détails : c'est ce qu'on nommera triangles de *troisième ordre* *.

Il faut s'arrêter successivement à chaque espèce de triangles : on parlera ensuite du rattachement des opérations.

TITRE I.er

Grands Triangles, ou Triangles de premier ordre.

Les triangles de premier ordre se trouvant connus des Géomètres, ainsi qu'on l'a dit, il n'est plus question que de s'assurer si les angles, les côtés, les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de leurs sommets, ont été donnés avec exactitude dans les bulletins.

Les sommets de ces triangles sont indiqués sur les cartes jointes à l'Instruction du 31 mai 1803 (*Collection*, tome I.er, page 216) : les côtés de chaque triangle y sont également tracés.

Mais, les bulletins pouvant contenir des erreurs dans l'expression des angles, des côtés et des distances, il a fallu, avant tout, vérifier ces bulletins, et s'occuper des moyens de parvenir à rectifier ce que l'expression des triangles pouvait offrir de défectueux.

Le Ministre a donné des ordres pour que la vérification et la rectification des bulletins des *grands triangles* se fissent par les

* On croit devoir insister sur cette différence, pour éviter toute confusion que la similitude de nom de *triangles de second ordre* pourrait introduire.

Il est donc bien entendu que les triangles appelés de *second ordre* dans l'Instruction, sont ceux nommés de *troisième ordre* par *Cassini*.

Directeurs et Professeurs du Cours de géométrie - pratique ouvert à Paris. M. *Hautier*, l'un des Professeurs, s'est chargé de ce travail; M. *Delambre* l'a revu; il en a été envoyé des extraits dans chaque département pour être remis aux Géomètres en chef, afin qu'ils établissent, s'ils ne l'avaient point encore fait, leur grand canevas à l'échelle d'*un à cinquante mille*. On croit utile d'expliquer les procédés de ces deux opérations *.

Les moyens employés pour vérifier le bulletin d'un *grand triangle* sans se porter sur le terrain, sont ceux-ci :

1.° La comparaison du tracé de ce triangle sur la carte, avec l'énonciation des angles, des côtés, et des distances à la méridienne et à la perpendiculaire, comprise dans le bulletin ; de cette manière on voit si ces angles, ces côtés et ces distances, indiqués par le bulletin, sont en rapport avec le tracé du triangle ; *(Note 1.re)*

2.° Le calcul de ce triangle, pour s'assurer si les côtés et les angles se répondent parfaitement ; *(Note 2.)*

3.° Le rapprochement des distances à la méridienne et à la perpendiculaire de chaque sommet d'angle, pour s'assurer si ces distances sont en harmonie avec les côtés du *grand triangle* examiné; *(Note 3.)*

4.° Enfin, la construction des tours d'horizon, quand il y a eu possibilité d'y parvenir. *(Note 4.)*

C'est par ces procédés que les bulletins des triangles de premier ordre, tracés sur les cartes adressées aux Géomètres, ont été vérifiés.

---

* MM. les Professeurs ont, dans des notes séparées de cette Instruction, réuni les principes et les formules de la résolution des divers problèmes relatifs à la trigonométrie et au levé des plans ; ces notes peuvent être consultées avec fruit. *On les trouve chez* COURCIER, *Libraire, quai des Augustins.*

Si les Géomètres en chef veulent faire eux-mêmes ou vérifier cette rectification, ils peuvent y employer les mêmes procédés. *(Note 5.)*

TITRE II.

Triangles de second ordre.

On a vu que les triangles de second ordre sont ceux qui, rattachés aux *grands triangles*, doivent lier entre eux les chefs-lieux des communes formant le groupe à arpenter *.

Les sommets de ces triangles de second ordre sont indiqués, en grande partie, dans les tables des distances à la méridienne et à la perpendiculaire **. Mais comme d'un côté l'on a des raisons de douter de l'exactitude de cette indication, et que de l'autre il faudrait, pour obtenir la triangulation de second ordre (séparément des détails du plan), faire, sur le terrain, une opération préliminaire, longue et dispendieuse, il a paru préférable de déduire *graphiquement* les côtés et les angles de chacun des triangles du second ordre, des observations qui auront lieu pour former la triangulation de troisième ordre dont il sera parlé au titre suivant.

Au moyen de ce que, dans ces opérations graphiques exécutées au cabinet, on partira d'abord d'un point vérifié d'un

---

* Les triangles qu'on nomme ici triangles de *second ordre*, sont, comme on l'a expliqué précédemment, ceux dits de *troisième ordre* dans les opérations de *Cassini*.

** Pour les départemens auxquels ne s'étendent point les opérations trigonométriques de *Cassini*, les distances des villes principales à la méridienne et à la perpendiculaire de Paris seront indiquées particulièrement d'après les longitudes et latitudes déterminées par la Connaissance des temps.

grand

grand triangle, on rattachera à ce point les communes environnantes, par un procédé qui ne ralentira en rien le travail de l'arpentage.

Ce procédé fait l'objet du titre IV ci-après.

TITRE III.

Triangles de troisième ordre.

LES triangles du *troisième ordre* sont, on l'a déjà dit, ceux qui, rattachés aux triangles du *premier*, doivent composer la triangulation particulière de chaque commune et offrir les élémens de celle de *second ordre* *.

Pour établir cette triangulation de *troisième ordre*, le Géomètre, après avoir préparé son papier, sur lequel seront provisoirement tracés des décimètres carrés (représentant les carreaux des plans à l'échelle d'*un à cinq mille*), se stationnera de manière à se placer sur le point même d'un grand triangle, ou à s'y rattacher, s'il est possible, par une base prise de la manière la plus convenable.

Ce rattachement opéré, il formera le canevas particulier du plan de la commune, en partant des points qu'il aura pu fixer, et observera ceux qui doivent être déterminés pour compléter ce canevas.

Ces points qu'observera le Géomètre, doivent être choisis de manière que les lignes par lesquelles on les lierait, forment un réseau de triangles qui couvrirait la plus grande partie possible du territoire de la commune.

L'Instruction du 29 juin 1803 parle de cette triangulation de *troisième ordre*, et prescrit la forme du registre destiné à

* Si ces triangles avaient été déterminés par les opérations de *Cassini*, ils auraient formé des triangles de *quatrième ordre*.

recevoir les résultats des calculs nécessaires pour la déterminer: mais cette Instruction n'indiquant peut-être pas d'une manière assez précise la marche à suivre dans ce travail, il a paru convenable de la tracer ici :

1.° Mesurer une base avec la plus grande exactitude;

2.° Faire, sur le terrain, les observations nécessaires pour déterminer les triangles dont on a besoin;

3.° Calculer les triangles observés;

4.° Former avec ces élémens le registre des observations trigonométriques, prescrit par l'Instruction du 29 juin précitée;

5.° Enfin construire le canevas trigonométrique particulier de la commune qui doit être joint à ce registre.

Le taux moyen de la superficie du plus grand nombre des communes étant d'environ *douze cents arpens métriques*, on regarde comme indispensable d'avoir, au moins, *dix points* donnés par la triangulation d'une commune de douze cents arpens et au-dessous; sauf à multiplier ces points à raison des localités, et d'après les bases qui viennent d'être indiquées.

Cette triangulation particulière se composera de manière que quelques points en soient pris hors du territoire de la commune qu'elle concernera.

De son harmonie avec les deux autres dépend l'exactitude du développement des détails topographiques dont elles sont les cadres.

TITRE IV.

Rattachement.

LES triangulations particulières des communes devant être liées par des points de rattachement, ainsi qu'il est prescrit *(Instructions des 24 novembre 1802, 1.er mars 1803 et 17 mars 1804)*,

, elles formeront, en les réunissant, un réseau de triangles, lequel, couvrant en définitif le territoire du département, aboutira aux grands triangles qui lui serviront de vérification.

Voici les dispositions préparatoires à prendre pour opérer ce rattachement, et qui ont déjà été employées avec succès :

1.° Former pour chaque département, et à l'échelle d'*un à cinquante mille*, un tableau d'assemblage sur lequel seront tracés, avec exactitude, des carreaux de centimètres correspondans aux carrés des plans et aux divisions indiquées dans l'Instruction du 31 mai 1803; *(Note 6.)*

2.° Coter, aux extrémités de chaque ligne de carreau, sa distance, en nombre rond de mille mètres, à la méridienne de Paris et à sa perpendiculaire; *(Note 7.)*

3.° Construire, sur ce tableau d'assemblage, un canevas des grands triangles, dont les bulletins auront été vérifiés ou rectifiés. *(Note 8.)*

Ce tableau d'assemblage, bien tendu et fixé à demeure, sera, comme on va le voir, l'encadrement des triangulations particulières de chaque commune, puisque ces triangulations particulières devront y être successivement rapportées suivant les progrès des opérations d'arpentage.

Ainsi donc, à mesure que le Géomètre en chef aura recueilli un certain nombre de canevas trigonométriques de communes contiguës, il les rapportera sur le tableau d'assemblage; et il réservera dans ses cartons les triangulations isolées, jusqu'à ce que, par suite des opérations, il ait rempli les vides intermédiaires, et se soit ainsi procuré une chaîne de triangles non interrompue.

Ce réseau continu de triangles qui se lient, et dans lequel chaque chef-lieu de commune se trouvera ainsi déterminé, donnera le moyen de construire graphiquement la triangulation

de *second ordre ;* elle se déduira avec facilité de l'ensemble des triangulations de *troisième ordre*, l'harmonie de celles-ci étant maintenue par leur rattachement aux grands triangles.

Les Géomètres qui n'auront pu déterminer sur les plans isolés des communes, et en nombre rond de mille mètres, les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de Paris, et qui auront tracé leurs carreaux conformément à la circulaire du 26 ventôse an 12 [17 mars 1804] (*Collection*, tome II, page 106), laisseront en blanc les colonnes du registre d'observations relatives à l'indication de ces distances. Il y sera suppléé avantageusement par le tableau d'assemblage, qui indiquera les distances de tous les chefs-lieux de commune à la méridienne de Paris et à sa perpendiculaire.

On remarquera que les grands triangles étant tracés d'avance sur le tableau d'assemblage, il faut, pour l'exactitude du rapport prescrit ici, partir d'un des points de ces grands triangles, ou attendre qu'on s'y soit lié, afin d'assurer le rattachement du canevas trigonométrique de chaque commune. Ce canevas, qui doit être joint au registre des opérations trigonométriques, n'en sera pas moins envoyé avec le calque du plan, aux termes de l'Instruction du 29 juin 1803.

Mais pour qu'on puisse connaître l'exactitude du rattachement, le Géomètre sera tenu (à mesure qu'un des grands triangles portés au tableau d'assemblage se trouvera rempli de triangles de troisième ordre) de fournir le calque, tant de ce grand triangle que de ceux du troisième ordre qui y seront compris, soit en tout, soit en partie.

Afin de pouvoir, au premier coup-d'œil, distinguer les points des signaux de ceux qui sont immuables, les premiers seront indiqués en *noir*, et les autres en *rouge*, sur le tableau d'assemblage.

II.e PARTIE.

Dispositions préparatoires pour le Levé du Plan.

TITRE I.er

Instrumens que doivent employer les Géomètres.

POUR une triangulation de quelque étendue, le cercle répétiteur de *Borda* est sans doute l'instrument le plus parfait : mais la nécessité de répéter les opérations et de réduire à l'horizon, détermine à préférer le cercle entier de *Le Noir*, qui offre divers avantages *.

A défaut de ce dernier instrument, on emploiera un graphomètre à lunettes, qui ait pour limbe une circonférence entiere.

Le graphomètre ordinaire pourra, comme par le passé, servir dans les opérations de détail.

Pour le levé du plan, la planchette se distingue des autres instrumens par la célérité de sa marche et l'exactitude du dessin.

La facilité que donne la planchette pour vérifier ses opérations et les rattacher à des points donnés, l'avantage que présente cet instrument qui figure le terrain sur le terrain même, lui ont toujours obtenu la préférence sur la boussole et sur le graphomètre, lorsqu'il a été question du détail de la carte.

* Le cercle entier *(à lunettes plongeantes)* dont il s'agit, est d'une construction facile, d'un usage commode pour rapporter les angles et les hauteurs à l'horizon ; et ce cercle, qui se trouve chez les Ingénieurs en instrumens de mathématiques, donne le moyen de faire toutes les observations avec autant de célérité que d'exactitude.

On croit inutile d'indiquer les accessoires qui doivent accompagner la planchette ; mais on observera qu'il convient qu'aux deux extrémités *sud* et *nord* de la tablette soient adaptés des rouleaux qui servent à tenir le plan bien tendu, et à le rouler et dérouler à volonté. On fera sentir, dans l'article relatif au levé du plan, les avantages que procurent ces planchettes à cylindre.

Il est expressément recommandé aux Géomètres de vérifier, avant leur départ pour les travaux de la campagne, les mètres, décamètres et les échelles dont ils devront se servir, en les comparant aux mesures-étalons qui sont déposées dans les bureaux de la préfecture. Ceux qui négligeront de prendre cette précaution, s'exposeront à faire un travail inutile.

Il serait même essentiel que chaque Géomètre eût un double mètre dont l'exactitude fût bien reconnue, et qui servît à vérifier, de temps à autre, les mesures qu'il emploie à l'arpentage.

TITRE II.

Rouleaux destinés à la minute du Plan.

Quel que soit l'instrument dont le Géomètre se proposera de faire usage pour le levé du plan, il se servira de rouleaux ou feuilles-matrices, sur lesquels il construira d'avance le canevas trigonométrique, comme s'il devait opérer à la planchette.

Les Géomètres du cadastre, qui font usage de la planchette, avaient d'abord levé les plans sur des feuilles détachées, parce que la tablette de leur instrument était dépourvue de cylindre ; mais le plus grand nombre d'entre eux ayant reconnu, par l'expérience, combien il est important, pour la perfection et la célérité du travail, de substituer des rouleaux aux feuilles détachées, se sont empressés de pourvoir le plateau de leur planchette, de l'accessoire convenable.

Pour faire sentir les avantages qu'ont les rouleaux sur les feuilles détachées, il faut remarquer qu'avec celles-ci l'on est dans la nécessité de raccorder le détail du plan à chaque raccordement de planchette, et de mettre le plus grand soin à ce que les opérations exécutées sur une feuille coïncident, dans la partie *nord* et *sud*, avec celles qu'on doit faire sur la feuille suivante ; ce qui exige des précautions dont on est dispensé en employant les rouleaux.

D'un autre côté, les points trigonométriques placés sur une feuille détachée ne pouvant servir, en tout, ni en partie, à la feuille qui doit immédiatement lui succéder sur la planchette, il faut nécessairement faire, pour les feuilles ainsi détachées, une triangulation plus détaillée que celle qu'exigent les rouleaux.

Au contraire, si les feuilles du plan, au lieu d'être isolées, forment, par leur réunion préalable, une bande de la largeur de la planchette et de la longueur du plan, ces feuilles, ainsi réunies, pouvant à volonté être roulées ou déroulées (pour faire figurer sur la tablette la partie sur laquelle on veut opérer), se prêtent mutuellement un certain nombre de points trigonométriques.

D'ailleurs, comme ces feuilles forment alors un tout continu dans la longueur entière du *nord* au *sud* du plan, les opérations de détail se lient naturellement dans toute l'étendue de la bande.

Au moyen des rouleaux, le Géomètre peut, sans inconvénient, morceler ses opérations, et, par exemple, travailler le même jour aux deux extrémités *nord* et *sud* de la commune, dans la partie du territoire correspondante à son rouleau ; mais il n'aurait pas cette facilité en employant des feuilles isolées, parce que leur raccordement successif l'oblige à des précautions

qui ne lui permettent pas d'opérer alternativement sur chacune d'elles *.

Il est convenable, au surplus, que les Géomètres préparent leurs rouleaux avant l'ouverture de la campagne, et que, pendant la mauvaise saison, ils fassent, dans le cabinet, toutes les dispositions possibles pour faciliter les opérations du dehors.

---

* Les rouleaux, il est vrai, ne dispensent pas de tout raccordement; mais, par leur moyen, ce raccordement se réduit à *deux côtés (est* ou *ouest)* du plan, au lieu de *quatre* pour les feuilles détachées : c'est, dès-lors, diminuer de moitié les difficultés qu'il présente.

Les bandes ou rouleaux offrent donc évidemment des avantages qu'on ne trouve point dans les feuilles isolées, et l'on ne doute pas que les Géomètres ne s'empressent d'adopter ces rouleaux.

Il faudra ménager dans toute sa longueur, à *droite* de chaque rouleau, une marge d'*un centimètre au moins ;* elle servira à réunir les rouleaux d'un même plan pour en former l'ensemble.

Lorsqu'un rouleau sera rempli et qu'on opérera sur celui qui l'avoisine, il conviendra de les rapprocher de temps en temps pour s'assurer de leur raccordement.

Il est, dans le levé des plans, des choses qui, au premier coup-d'œil, paraissent indifférentes et qui cependant peuvent produire de grands inconvéniens. *Par exemple,* il suffirait qu'un rouleau fût mal *carroyé,* pour que la triangulation la plus exacte parût défectueuse.

On verra, en effet, dans l'article relatif au levé des plans, que, si les méridiennes déterminées par le tracé des carrés ne sont pas parallèles, il devient difficile d'orienter la planchette dans la direction du canevas, et par conséquent de se rattacher à ce dernier pour prendre le point de station.

D'ailleurs les carrés des plans exigent la plus grande précision, puisqu'ils servent à vérifier le calcul des surfaces décrites.

TITRE III.

TITRE III.

Délimitation.

La première opération dont le Géomètre doit s'occuper en s'installant sur le terrain, est celle de la délimitation.

Assisté du Contrôleur des contributions et des Maires des communes co-intéressées, il se transporte sur les limites du territoire dont il doit lever le plan : il en parcourt le périmètre, et trace successivement, dans l'ordre de sa marche, le croquis du polygone que forme le territoire ; de manière qu'après avoir fait le tour de la commune, il ait le plan visuel de sa configuration.

S'il s'élève des contestations sur quelques portions des limites, il indique sur son croquis les points douteux ; et d'après la connaissance qu'il a prise des localités, il donne son opinion sur les parties contentieuses.

Le Géomètre qui parcourt ainsi la commune, porte naturellement un œil attentif sur le territoire qu'il est intéressé à bien connaître. Il examine, par exemple, quels sont les emplacemens les plus avantageux, soit pour mesurer une base, soit pour établir des signaux ; et cet aperçu des localités lui facilite les travaux de la triangulation dont il doit ensuite s'occuper.

Enfin, l'objet principal étant ici de fixer les limites de la commune, le Géomètre s'est mis à même de rédiger le procès-verbal de délimitation avec les Maires et le Contrôleur qui l'accompagnent.

Mais, pour que ce procès-verbal ne laisse aucune incertitude sur la détermination des limites, il doit nécessairement exprimer la longueur des lignes, et l'ouverture des angles rentrans et saillans que forment les brisures de ces lignes délimitatives.

Le Géomètre rédigera néanmoins le procès-verbal dont il s'agit, immédiatement après la reconnaissance des limites; il le fera signer par les Maires des communes intéressées; et lorsque le plan sera fini, il joindra à ce procès-verbal un tableau indicatif de la longueur des lignes et de l'ouverture des angles qui déterminent la véritable circonscription du territoire de la commune. *(Voir ce qui est dit relativement à ce procès-verbal, Note 9.)*

On voit dès-lors que le procès-verbal de délimitation ne saurait être clos qu'après l'exécution du plan.

III.e PARTIE.

Application des Opérations trigonométriques au Levé du Plan.

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES.

Pour lever avec précision le plan du territoire d'une commune, il est indispensable de s'assurer d'abord de la position géométrique d'un certain nombre de points de ce territoire.

Ces points doivent être très-apparens, et distribués de manière que le Géomètre puisse en observer au moins trois de chaque position qu'il lui convient de prendre dans le levé du plan.

Les clochers, les tours, les moulins à vent, &c. &c., ordinairement très-élevés, conviennent aux observations trigonométriques : mais rarement ces objets se trouvent dans une commune en nombre égal à celui des points nécessaires; et, dans ce cas, on complète ceux-ci par des signaux.

On ne parvient à bien connaître les positions respectives d'un certain nombre de points quelconques, que par des procédés et des calculs trigonométriques. L'Instruction du 29 juin 1803 (*Collection*, tome I.er, page 255) indiquant les méthodes à

employer pour former un canevas, il faut en montrer l'usage et l'utilité dans les opérations géodésiques.

C'est à l'aide du canevas que le Géomètre, occupé du levé du plan, conduit ses opérations dans le même parallélisme, après s'être assuré de la direction qu'il prend.

C'est encore par lui que le Géomètre connaît la position où il se trouve sur le terrain, et qu'il la détermine sur le plan.

Ainsi donc un canevas oriente et stationne le Géomètre; et ces deux avantages qu'il procure, sont (ainsi qu'il va être démontré), le résultat d'une simple combinaison de la similitude et du parallélisme des triangles.

On peut opérer, d'après un canevas, avec tous les instrumens généralement usités, tels que le graphomètre, la boussole et la planchette : mais le choix n'en est pas indifférent, et il sera aisé de reconnaître celui d'entre eux qui mérite la préférence, par la facilité avec laquelle on trouvera le point de station; opération qui consiste à résoudre le problème suivant :

De trois points donnés sur le terrain et rapportés sur le plan à une échelle quelconque, déterminer sur ce plan un quatrième point, c'est-à-dire, le point de station.

TITRE I.er

Procédé de la Planchette.

Le Géomètre étant sur le terrain et dans la partie appropriée au rouleau qu'il a établi sur la planchette, choisit un emplacement d'où il puisse observer trois points du canevas.

Il dresse l'instrument sur son pied, et fait ressortir, sur le développement de la tablette, les points trigonométriques rapportés sur le rouleau, et qui correspondent à ceux qu'il aperçoit sur le terrain du point où il se propose de stationner.

Il veille à ce que le rouleau soit bien tendu, et dans la direction de la méridienne ; il met la tablette de l'instrument dans un plan horizontal, et s'assure qu'elle est dans cette position, au moyen d'un niveau.

Il oriente l'instrument, en plaçant d'abord sur le rouleau le déclinatoire, qu'on appuie sur l'une des méridiennes pour assurer le parallélisme.

Il fait ensuite mouvoir la tablette horizontalement, jusqu'à ce que la pointe boréale de l'aiguille aimantée (étant fixée au degré de déclinaison d'après lequel le canevas a été orienté en le construisant sur les rouleaux) indique que le plan est dans le parallélisme des points trigonométriques.

Tout est alors disposé de manière à pouvoir trouver sur le rouleau le point qui répond à celui où l'instrument est dressé sur le terrain.

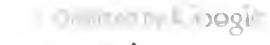
Voici comme on obtient ce point.

Si l'on détermine sur le terrain le triangle *A, B, C (planche 4, fig. 1.re)*, et qu'on le rapporte sur la planchette, à l'échelle convenue, on aura, par exemple, *abc*, pour le triangle semblable à *ABC*.

L'instrument étant placé de manière que les deux triangles soient doublement parallèles, tant par leurs côtés homologues que dans leur plan horizontal, et que de la position prise on aperçoive sur le terrain les points *A, B, C*, il suffira d'une opération graphique pour résoudre le problème proposé *.

---

* Pour rendre plus intelligible l'explication dans laquelle on entre sur l'usage et l'utilité des triangles semblables, il a fallu, dans l'exemple qu'on en donne, les présenter avec leur entière configuration, et comme étant pourvus de leurs côtés : mais, dans la pratique, les seuls points déterminés par leurs sommets sont ostensibles sur le terrain et réellement



On pose d'abord, et indifféremment, la règle de l'alidade sur l'un des points *a*, *b*, *c* (sur *a*, par exemple), autour duquel on la fait mouvoir, jusqu'à ce que, par un rayon visuel pris à travers les deux pinnules, on tranche le point *A*, correspondant au point *a*, à cause de la similitude et du parallélisme des triangles dont ils dépendent.

On trace au crayon sur la planchette, et le long de l'alidade, en partant du point *a*, une ligne *af*, qui peut être considérée comme un prolongement ostensible et indéfini du rayon visuel jeté de *a* en *A*.

Par le même procédé, on mène un autre rayon de *b* en *B*, et l'on a l'indéfinie *bh*, qui coupe *af* au point *i*.

Ce point d'intersection des deux lignes *af*, *bh*, doit être sur la planchette le même que celui où est placé l'instrument sur le terrain.

Mais ces deux rayons se couperaient également, quoique les triangles *ABC* et *abc* ne fussent point parallèles, horizontaux, ni même semblables; et dès-lors le point d'intersection ne serait pas le point de station. *(Note 10.)*

---

utiles aux opérations. C'est donc mal-à-propos que quelques Géomètres, en construisant le canevas sur le papier qui doit reçevoir le plan, au lieu de se borner à indiquer les sommets des triangles par de simples points qu'on peut rendre plus perceptibles en les cernant d'un petit cercle dont ils deviennent le centre, expriment complétement la triangulation, et occasionnent ainsi une confusion de lignes qui nuit souvent à la clarté du détail.

Il faut remarquer que les opérations trigonométriques qu'on exige des Géomètres, ne doivent être considérées que comme le meilleur moyen d'exécution pour parvenir à connaître les positions respectives de plusieurs points du territoire. Dès que ces points sont rapportés sur le plan, il convient donc de les dégager de tous les rayons qui ont concouru à leur détermination, et qui deviennent tout au moins superflus dans les opérations subséquentes.

On ne doit donc pas se fier à l'intersection de deux rayons seulement pour déterminer un point de station.

Pour vérifier l'exactitude de ce point, on le met en contact avec la règle de l'alidade, qu'on *appuie* aussi sur le troisième point *c*; et à travers les deux pinnules, on doit observer *C* son correspondant sur le terrain.

Dès qu'il est ainsi reconnu que les trois rayons visuels se coupent en un même point, on en conclut que le point de station est coordonné avec ceux observés, et que, par conséquent, il est bien déterminé.

Mais cette coïncidence ne peut avoir lieu, comme on l'a déjà observé, qu'autant que les triangles *ABC* et *abc* sont parallèles par leurs côtés homologues. Or, c'est ce parallélisme qui assure l'orientement de la planchette, ainsi qu'il démontre la similitude des triangles.

TITRE II.

Procédé de la Boussole.

Le Géomètre dispose le papier destiné au levé du plan, comme s'il devait opérer à la planchette. Il fixe provisoirement les rouleaux sur une table, en les rapprochant de manière qu'ils forment un tout continu. Il y construit le canevas trigonométrique, et trace ensuite les carrés à un nombre rond de mille mètres de la méridienne et de sa perpendiculaire. A mesure qu'il veut faire usage du canevas, il en prend des extraits sur des feuilles séparées, qu'il adapte successivement à un carton de dimensions convenables; celles (par exemple) de la tablette d'une planchette. Enfin, il se munit de celle de ces feuilles qui, d'après les points trigonométriques qu'elle renferme, correspond à la partie du terrain où il se propose d'opérer.

Ces dispositions étant faites, le Géomètre pourrait employer le procédé suivant pour résoudre, à la boussole et sur le terrain même, le problème proposé pour la planchette.

Les points A, B, C (planche 4, fig. 2), *étant donnés, déterminer par leur moyen, et d'après une seule station, un quatrième point duquel on aura pu les observer* *.

Soit le point *D* que l'on veuille déterminer au moyen de la boussole. Après s'être établi à l'ordinaire, on visera sur les points *A, B, C*, qu'on peut apercevoir; et ayant marqué les nombres de degrés compris entre les rayons *DA, DB, DC*, et la gauche du nord de l'aiguille aimantée, on aura les données suffisantes pour placer le point *D* sur le papier.

En effet, le triangle *a b c (même planche, fig. 3)* étant semblable à celui du terrain, et la direction de l'aiguille étant donnée aux points *a, b, c*; de ces mêmes points on tirera les droites indéfinies *ad, bd, cd*, faisant, avec les parallèles qui passent par ces points, les supplémens des angles que les rayons correspondans formaient au point *D* avec la direction de l'aiguille, en se servant pour cela des numéros diamétralement opposés à ceux que l'on aura observés. Ces trois droites, devant se couper au même point, si l'opération est bien faite, détermineront, par leur intersection, le point *d*, qui sera le point de station duquel le Géomètre partira pour lever le détail des objets à sa portée.

Lorsque, pour suivre la confection du plan, il sera obligé de

* Il suffirait, en principe, de pouvoir observer deux des points déterminés pour se stationner; mais si quelquefois, dans la pratique, on se relâche de la sévérité de la théorie, il en doit être autrement, lorsqu'il s'agit d'intersections. On peut voir, à cet égard, la remarque qu'on a faite en traitant du procédé de la planchette, *page 23*.

s'établir successivement sur de nouveaux points, il les déterminera de la manière qui vient d'être indiquée.

Les feuilles étant toutes remplies, ou à mesure que chacune d'elles le sera, le Géomètre rapportera ses opérations sur les rouleaux, qui, d'après les dispositions déjà prises, se trouvant tendus et carroyés, sont disposés à les recevoir.

TITRE III.

Procédé du Graphomètre.

Ce qui a été dit relativement à la boussole, s'applique au graphomètre : voici la manière d'opérer avec ce dernier instrument pour trouver le point de station.

Les positions respectives des points A, B, C *du terrain* (planche 4, fig. 4), *étant connues et rapportées sur une carte, déterminer sur cette carte, par une seule station, un quatrième point* D *duquel on voie les trois premiers.*

Après avoir placé le graphomètre au point *D*, on observe les angles *ADB*, *BDC*; ces données, avec les parties déjà connues du triangle *ABC*, sont suffisantes pour calculer *AD*, *BD*, *CD*, et pour déterminer la position du quatrième point *D*.

Mais les calculs trigonométriques au moyen desquels on pourrait obtenir ces distances, devenant trop longs pour être employés dans des opérations de détail d'une certaine étendue, on a cru devoir indiquer une construction graphique qui donnera avec célérité et assez exactement le point cherché.

La figure *a*, *b*, *c*, construite sur la carte (*fig.* 5), étant semblable à celle du terrain *ABC*, il faut sur *b*, *c*, vers le côté *dcd*, construire un segment de cercle *cbd*, capable de l'angle *bdc*; sur *ab*, construire encore un segment de cercle capable

capable de l'angle *adc:* l'intersection des deux circonférences en *d* déterminera le quatrième point cherché.

On va expliquer cette construction. Après avoir élevé sur le milieu des lignes *ab*, *bc*, la perpendiculaire *ef*, *e'f'*, il faut,

1.° Au point *c*, faire un angle *bce'* égal au complément de l'angle *bcd :* l'intersection du côté *e'c* de cet angle avec la perpendiculaire *e'f'* donne le centre d'un cercle, dont la circonférence d'un rayon *e'c* ou *cb* détermine le segment proposé;

2.° Au point *a*, faire un angle égal au complément de l'angle *abd* *: le point de section du côté *ac* de cet angle avec la perpendiculaire *ef*, détermine le centre d'un cercle, dont la circonférence décrite d'un rayon *ac* ou *eb* donne le segment proposé.

Tel est le procédé graphique de cet instrument, lorsqu'étant employé au détail de la carte, il doit lier ses opérations à des points préalablement déterminés.

On peut d'ailleurs consulter, pour la suite du travail, les deux derniers paragraphes de l'article relatif à la boussole, lesquels trouvent ici leur application.

CONCLUSION.

Ce qui vient d'être dit prouve, d'une part, que le point de station vérifie la justesse ainsi que la direction du canevas; et d'une autre part, que le canevas à son tour détermine et constate le point de station **.

---

* On observe que l'angle *abd* étant fort obtus, son complément doit être négatif, et dès-lors construit en sens contraire.

** On conçoit que si les points trigonométriques étaient mal déterminés, ce serait en vain qu'on chercherait à s'y rattacher pour se stationner; mais un canevas bien exécuté facilite beaucoup l'arpentage, dont il assure d'ailleurs l'exactitude géométrique, en plaçant chaque partie du plan dans un même parallélisme.

C'est ainsi que s'identifient et que se surveillent mutuellement les deux opérations trigonométrique et géodésique dans leur concours à l'exécution du plan.

En établissant l'instrument sur le terrain, il faut toujours faire en sorte que, de la position qu'on prend, relativement aux points du canevas auxquels on peut se rattacher, les rayons visuels se coupent à angles droits autant qu'il est possible; car, si leur direction était telle qu'ils formassent entre eux des angles trop aigus ou trop obtus, les indéfinies pouvant se confondre, il deviendrait impossible de distinguer nettement leur point commun d'intersection.

La station étant prise par le moyen qu'on vient d'indiquer, on procède au levé du plan, en suivant les méthodes généralement usitées pour la planchette.

D'après ce qu'on vient d'exposer, on voit de quelle importance est un canevas trigonométrique pour le levé de la carte.

Cependant on a remarqué que quelques Géomètres ne faisaient les opérations trigonométriques que lorsque l'arpentage était terminé; mais ceux-là n'ont pu renverser ainsi l'ordre raisonné du travail, qu'en ignorant les propriétés d'une triangulation appliquée au levé du détail. Ils n'ont pas su que son but était moins d'indiquer les erreurs de l'arpentage déjà fait, que de les prévenir dans celui qui doit se faire.

En effet, les points trigonométriques peuvent être considérés comme des fils que saisit constamment le Géomètre pour ne pas s'égarer dans le labyrinthe des détails.

Si ces points n'existent pas, sa marche, qui ne peut être exacte qu'autant qu'elle est constante et directe, devient incertaine et sinueuse. Ayant perdu le parallélisme, il est, à proprement parler, *désorienté*, et ne connaît plus sa position

géométrique : il penche tantôt à l'est et tantôt à l'ouest, suivant que l'aiguille aimantée à laquelle il se fie, est plus ou moins versatile ; et en cherchant à se redresser, il rétrécit et agrandit alternativement le figuré du plan, qui, dès-lors, ne peut qu'être défectueux *.

* Le procédé qu'on vient de prescrire, pour se rattacher à des points donnés, tient aux principes de l'art : aussi s'en est-on servi avec succès dans la confection du cadastre de la Corse et de celui de la Haute-Guienne. Mais, pour que ce procédé puisse être appliqué sans inconvénient à toutes les localités que présente le vaste territoire de la France, on aura quelquefois besoin de le modifier. Indiquons dans quel cas et de quelle manière ces modifications pourront avoir lieu.

Il est des portions de territoire qui se refuseront à la manière de se stationner, par la rencontre de trois rayons visuels en un seul point : tels sont les endroits fourrés, d'où l'on ne peut faire d'observation au loin ; mais alors le Géomètre cerne les masses où il ne peut opérer trigonométriquement ; et lorsque la difficulté est ainsi concentrée et réduite à son dernier terme, il peut facilement la lever, en se laissant conduire accidentellement par l'aiguille aimantée, dans les petits espaces déjà coordonnés avec l'ensemble du plan.

Cette difficulté se reproduira presque toujours lorsqu'il s'agira d'opérer dans l'intérieur des villes et des villages : mais si leur partie extérieure est auparavant levée dans tout son contour, l'emplacement des habitations se trouvera naturellement marqué sur le plan ; on aura le périmètre de leur ensemble, et il sera alors facile d'exécuter le détail, en partant des points connus au-dehors, pour prendre d'abord les principaux alignemens de l'intérieur, et, immédiatement après, les détails qu'on fait ressortir des masses dont on s'est emparé, en opérant du grand au petit.

Dans des contrées entières, il paraît impossible, au premier coup-d'œil, de conduire régulièrement des opérations géodésiques, parce que les propriétés y sont, en général, entourées d'arbres ou de haies élevées, qui semblent devoir s'opposer à la liaison de chaque partie du travail ; mais, en examinant de près ces localités, on découvre presque toujours des échappées de vue, à la faveur desquelles il est aisé d'éviter ou de

Tel est le résultat probable du travail, lorsque le Géomètre s'est dispensé d'un canevas trigonométrique dans l'arpentage d'une grande surface.

Mais si les opérations de détail peuvent, au moyen du canevas, se rattacher toujours, soit immédiatement, soit médiatement, aux grands triangles; si les instrumens dont on se sert,

---

vaincre les obstacles. Un Géomètre qui connaît les ressources de son art, est rarement arrêté par les difficultés; ou plutôt il n'en rencontre jamais qu'il ne puisse surmonter.

Elles se réduisent généralement au plus ou moins de précautions qu'il faut prendre, suivant les pays où l'on opère. Dans le cas présent, par exemple, le Géomètre multiplie les signaux pour la formation du canevas, parce qu'il sait que ses rayons visuels seront souvent bornés dans le levé du plan, et qu'il aura besoin d'avoir à sa proximité des points trigonométriques auxquels il puisse se rattacher pour s'assurer de sa position.

En supposant que quelques territoires de communes résistent à la manière de se stationner par le moyen qu'on prescrit ici, dans ce cas, qui, s'il a lieu, sera extrêmement rare, le Géomètre procédera à l'arpentage et au levé du plan, en opérant du grand au petit. Ainsi il prendra d'abord le perimètre de la commune, ensuite celui de chaque section, et subséquemment il opérera sur le détail en masse de chaque nature de culture. Cette manière de procéder ne dispensera pas le Géomètre de faire une triangulation préalable pour se donner quelques points de repère : mais ces points, qui, comme on l'a déjà observé, sont un préservatif d'erreurs, en pratiquant la méthode généralement prescrite, ne seront plus, dans cette exception, que de faibles indices du degré d'exactitude de l'arpentage exécuté d'un point à un autre; aussi cet expédient de pratique ne peut être justifié que par l'impossibilité d'employer la méthode qui dérive des principes, par son exactitude et son extrême simplicité.

Cette dernière disposition, ainsi que les remarques qu'on a faites sur la nécessité d'une triangulation préalable, ne sont pas particulières à la planchette, et l'on conçoit qu'elles s'appliquent à tous les instrumens dont les Géomètres peuvent faire usage.

si les rouleaux qu'on emploie, facilitent et assurent la plus grande précision dans le levé du plan, la marche du travail devient plus rapide, en même temps qu'elle présente plus d'exactitude dans ses résultats.

Les Géomètres doivent donc aisément reconnaître les avantages des procédés qu'on leur indique, et s'empresser de les suivre, en commençant par former leur tableau d'assemblage; parce que ce tableau, construit avec le soin qu'on y doit apporter, donne un moyen certain et facile d'assurer l'harmonie des opérations de détail que les Géomètres secondaires n'exécutent que sous la responsabilité du Géomètre en chef.

APPROUVÉ :

Le Ministre des finances, signé GAUDIN.

NOTES

Concernant le Développement des Instructions sur le Levé des Plans du territoire des Communes pour le Cadastre de la France.

NOTE I.re

CETTE opération a simplement pour objet de prendre un aperçu de l'exactitude du triangle : elle n'est ni longue ni difficile ; un bon rapporteur, un compas, l'échelle de la carte, suffisent pour vérifier les angles, ainsi que les côtés d'un grand triangle, et voir si les indications données dans le bulletin qui le concerne, sont en rapport approché avec le tracé du triangle.

A l'égard de la vérification des distances à la méridienne et à la perpendiculaire portées au bulletin, il convient, pour la faciliter, que le Géomètre trace sur les feuilles de la carte de *Cassini* qui lui ont été adressées, des carreaux de *dix lignes* du pied de France, représentant sur la carte *mille toises* prises sur le terrain. Ces carreaux seront tracés d'après l'échelle que présente la feuille même, et qui a éprouvé avec elle le retrait du papier.

Chaque feuille pleine de la carte de *Cassini* ayant quatre cents lignes de base sur deux cent cinquante lignes de hauteur, on en divisera la base en quarante parties égales, et la hauteur en vingt-cinq ; ce qui donnera des carreaux de *dix lignes* en côté, représentant, comme on vient de le dire, *mille toises* sur le terrain.

Les distances à la méridienne et à la perpendiculaire se trouvent indiquées sur les lignes de cadre de chaque feuille ; il ne s'agira donc que de coter les distances intermédiaires sur chacune des lignes qui seront tracées dans l'intérieur de la feuille, et ces distances se trouveront marquées de *mille* en *mille toises.*

On pourra alors vérifier plus commodément, et même presque à l'œil, si les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, données par les bulletins, sont en rapport approché avec la position des sommets d'angles sur la carte.

NOTE 2.

POUR s'assurer si les côtés et les angles d'un grand triangle se répondent parfaitement, on procédera par les moyens connus pour la résolution des triangles.

NOTE 3.

POUR s'assurer si les côtés du triangle sont en harmonie avec les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, on considérera chaque côté de ce triangle comme l'hypoténuse d'un autre triangle toujours rectangle, et dont les deux autres côtés, qui se trouvent nécessairement adjacens à l'angle droit, sont formés, l'un par la somme ou par la différence des distances à la méridienne de Paris, et l'autre par la somme ou par la différence des distances à sa perpendiculaire, de chacun des points extrêmes du côté du triangle qu'on cherche.

On observera d'abord que la somme des distances n'est prise que lorsqu'il s'agit de points liés par des lignes qui coupent soit la méridienne de Paris, soit sa perpendiculaire, soit ces deux lignes à-la-fois, et que ces cas sont bien plus rares que celui où l'on opère par la différence des distances.

Voici quatre exemples :

1.° Cas où la méridienne de Paris est coupée ;

2.° Cas où c'est sa perpendiculaire ;

3.° Cas où la méridienne et la perpendiculaire sont coupées par la même ligne ;

4.° Cas le plus ordinaire, où la ligne ne coupe ni la méridienne de Paris, ni sa perpendiculaire.

PREMIER CAS,

Celui où la Méridienne de Paris se trouve coupée par la ligne qui réunit deux points donnés.

Soient *(planche 1.re)* les communes de *Colombes* et d'*Aubervilliers*, dont on veut connaître l'éloignement.

Colombes est (comme on voit) à l'*ouest* de la méridienne de Paris, et *Aubervilliers* à l'*est.* Ces deux points sont au nord de la perpendiculaire. Les

Les tables donnent les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de ces deux points ainsi qu'il suit :

	DISTANCES DONNÉES			
	À LA MÉRIDIENNE.		À LA PERPENDICULAIRE.	
	en toises.	en mètres.	en toises.	en mètres.
Colombes........	3,150. Ouest.	$6,139^{m}$ 4^{d}	4,974. Nord.	$9,694^{m}$ 5^{d}
Aubervilliers......	1,730. Est.	3,371. 8.	4,458. Nord.	8,688. 8.
Colombes est donc plus au nord qu'*Aubervilliers* de....................				1,005. 7.

ce qui équivaut à 516 toises.

Si, d'une part, l'on prolonge à l'est la perpendiculaire de *Colombes*, jusqu'à ce qu'elle rencontre au point *K* la méridienne passant par *Aubervilliers*, et si, réciproquement, on prolonge à l'ouest la perpendiculaire d'*Aubervilliers* jusqu'au point *V*, où elle rencontre la méridienne passant par *Colombes*, on formera un parallélogramme rectangle, *Colombes K*, *Aubervilliers V*, ayant pour base la distance entre les méridiennes de *Colombes* et *Aubervilliers*, et pour hauteur, la différence des distances de ces deux communes à la perpendiculaire de l'Observatoire.

La ligne de *Colombes* à *Aubervilliers*, dont on cherche la longueur, forme la diagonale de ce parallélogramme, ou l'hypoténuse des deux triangles rectangles égaux, *Colombes*, *Aubervilliers K*, et *Colombes*, *Aubervilliers V*.

Dans chacun de ces triangles, on connaît les deux côtés adjacens à l'angle droit.

En effet, le côté *Colombes K*, égal par construction à *Aubervilliers V*, est formé,

1.° De la distance occidentale de *Colombes* à la méridienne de Paris, donnée de.. $6,139^{m}$ 4^{d}

2.° De la distance orientale d'*Aubervilliers* à cette méridienne, également donnée de........................ 3,371. 8.

Somme de ces distances, ou *Colombes K* ou *Aubervilliers V*.. 9,511. 2.

Ce qui revient à 4,880 toises.

Le côté *Colombes V*, égal à *Aubervilliers K*, est formé de la différence des distances à la perpendiculaire de *Colombes* et d'*Aubervilliers*, qu'on vient de trouver de $1,005^{m}$ 7^{d}

Dans tout triangle rectangle, la somme des carrés faits sur les côtés adjacens à l'angle droit, est égale au carré construit sur l'hypoténuse. Il suffit donc à présent, pour connaître la longueur de la ligne *Colombes* et *Aubervilliers*, d'opérer ainsi qu'il suit :

Le côté *Colombes K* est égal à 9,511^m 2^d, dont le carré est de 90,459,121, ci.................................. 90,459,121^m

Le côté *Aubervilliers K* ou *Colombes V* est égal à 1,005^m 7^d, ou 10,006^m, dont le carré est de.................. 1,012,036.

Somme des carrés........... 91,471,157.

Cette quantité exprime le carré de l'hypoténuse.

La racine est de 9,564^m pour.................... 91,470,151.
de 9,565 pour.................... 91,489,225.

On prendra 9,564 mètres comme quantité plus approchée et pour éviter une fraction.

Voici, au surplus, l'opération en toises :

Le côté *Colombes K* est, en toises, de 4,880; carré.. 23,814,400^t

Le côté *Aubervilliers K* est, en toises, de 516; carré.. 266,256.

Somme des carrés.......... 24,080,656.

Quantité exprimant, en toises, le carré de l'hypoténuse, et dont la racine est
de 4,907 pour.................. 24,078,649^t
de 4,908 pour.................. 24,088,464.

4,907 toises donnent 9,563^m 92,117,
4,908 toises donnent 9,564. 87,020;

ce qui se rapproche beaucoup de l'exactitude rigoureuse.

Les tables de carrés des nombres qui ont été publiées de 1 à 10,000, facilitent singulièrement l'opération, relativement à laquelle on n'est entré ici dans quelques détails que parce qu'elle est la même pour tous les cas.

SECOND CAS,

Celui où la Perpendiculaire se trouve coupée par la ligne formant la distance entre deux points.

Soient *(même planche 1.re)* les communes de *Saint-Cloud* et de *Meudon*, desquelles on veut connaître l'éloignement.

Saint-Cloud est (comme on voit) au *nord* de la perpendiculaire menée à la méridienne de Paris, au point même de l'Observatoire, et *Meudon* au *sud* de cette perpendiculaire.

Les tables donnent les distances de ces deux points à la méridienne et à la perpendiculaire ainsi qu'il suit :

	DISTANCES DONNÉES			
	À LA MÉRIDIENNE.		À LA PERPENDICULAIRE.	
	en toises.	en mètres.	en toises.	en mètres.
Saint Cloud.......	4,414. Est.	8,603m 04c	408. Nord.	795m 2c
Meudon..........	3,762. Est.	7,334. 22.	1,668. Sud.	3,250. 9.
Saint-Cloud est plus éloigné que *Meudon* de la méridienne de Paris, et toujours à l'est, de.........................		1,268. 82.	ou de 651 toises.	

Si l'on prolonge la méridienne de *Saint-Cloud* jusqu'au point *A*, où elle rencontre le prolongement de la ligne de distance de *Meudon* à la méridienne de Paris, on aura le triangle rectangle *Saint-Cloud*, *Meudon*, *A*, dont l'hypoténuse *Saint-Cloud*, *Meudon*, est l'objet de la recherche.

Dans ce triangle, on connaît les deux côtés adjacens à l'angle droit ; ce sont *Saint-Cloud A* et *Meudon A*.

En effet, le côté *Saint-Cloud A* est égal à *F Meudon*, distance de *Meudon* à la perpendiculaire........................ 3,251m 992.

Plus *H Saint-Cloud*, distance de *Saint-Cloud* à la perpendiculaire.................................. 795. 206.

Longueur du côté *Saint-Cloud A*................. 4,047. 198.

Le côté *Meudon A* est égal à la distance de *Saint-Cloud* à la méridienne de Paris, donnée de.............................. 8,603^{m} 04.

Moins la distance de *Meudon* à cette méridienne, distance qui est donnée de.............................. 7,334. 22.

Différence entre ces distances ou côté *Meudon A*........ 1,268. 82.

Comme on l'a déjà dit, nous prendrons 1,269.

Les deux côtés *Saint-Cloud A* et *A Meudon* ainsi connus, on obtiendra le troisième, *Meudon, Saint-Cloud*, en opérant comme dans le premier cas.

Saint-Cloud A = 4,047^{m}, dont le carré est......... 16,695,396^{m}

A Meudon = 1,269, dont le carré est......... 1,610,361.

Somme des carrés........... 18,305,757.

Cette quantité exprime le carré de l'hypoténuse *Saint-Cloud, Meudon.*

La racine est de 4,278^{m} pour................... 18,301,284^{m}

de 4,279 pour................... 18,309,841.

On prendra 4,278 mètres, comme quantité plus approchée et pour éviter une fraction.

TROISIÈME CAS,

Celui où la Méridienne de Paris et sa Perpendiculaire menée au point de l'Observatoire, sont coupées par la ligne formant la distance d'entre deux points donnés.

Soient (*même planche 1.re*) les communes de *Noisi-le-Sec* et de *Bourg-Égalité*, dont on veut connaître l'éloignement.

Noisi-le-Sec est à l'*est* de la méridienne et au *nord* de la perpendiculaire.

Bourg-Égalité est à l'*ouest* de la méridienne et au *sud* de la perpendiculaire.

Les tables donnent les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de ces deux points ainsi qu'il suit :

	DISTANCES DONNÉES			
	À LA MÉRIDIENNE,		À LA PERPENDICULAIRE,	
	en toises.	en metres.	en toises.	en metres.
Noisi-le-Sec.......	4,280. Est.	8,341^{m} 8^{d}	3,057. Nord.	5,958.
Bourg-Égalité....	734. Ouest.	1,500. 7.	6,096. Sud.	6,034.
Somme des distances..	5,014.	9,842. 5.	9,153.	11,992.

Si l'on prolonge au nord la méridienne de *Bourg-Égalité* jusqu'au point *L*, où elle rencontre le prolongement de la parallèle à la perpendiculaire passant à *Noisi-le-Sec*, on a le triangle rectangle *Noisi-le-Sec*, *Bourg-Égalité L*, dont on connaît les deux côtés adjacens à l'angle droit.

En effet, le côté *Noisi-le-Sec L* est égal à la somme des distances à la méridienne de Paris, de *Noisi-le-Sec* (orientale), donnée de... 8,341^{m} 8^{d}
Et de *Bourg-Égalité* (occidentale), donnée de........ 1,500. 7.

Total, comme on l'a déjà dit........ 9,842. 5.

Nous partons de 9,842, pour éviter la fraction.

Le côté *Bourg-Égalité L* est égal à la somme des distances à la perpendiculaire de Paris, de *Noisi-le-Sec* (septentrionale), donnée de. 5,958^{m} 2^{d}
Et de *Bourg-Égalité* (méridionale), donnée de....... 6,034. 2.

Total, comme on l'a déjà dit........ 11,992. 4.

que nous réduisons à 11,992 mètres, pour éviter la fraction.

Le troisième côté, ou l'hypoténuse *Bourg-Égalité*, *Noisi-le-Sec*, s'obtiendra toujours par le procédé employé dans les deux premiers cas.

Noisi-le-Sec L = 9,842, dont le carré est de.... 96,864,964^{m}
L Bourg-Égalité = 11,992, dont le carré est de.... 143,808,064.

Somme des deux carrés.......... 240,673,028.

Cette quantité exprime le carré de l'hypoténuse *Noisi-le-Sec*, *Bourg-Égalité*,

La racine est de 15,513^{m} pour................. 140,653,159^{m}
de 15,514 pour................. 140,684,196.

On prendra 15,513 mètres, comme quantité plus rapprochée et pour éviter une fraction.

QUATRIÈME CAS,

Celui où la ligne formant la distance des deux points donnés ne coupe ni la Méridienne de Paris, ni sa Perpendiculaire.

Soient *(même planche 1.re)* les communes de *Maisons* et de *Thiais*, dont on veut connaître l'éloignement, et qui, placées dès-lors dans la même région, sont toutes deux à l'*est* de la méridienne de Paris et au *sud* de sa perpendiculaire.

Les tables donnent les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de ces deux points ainsi qu'il suit :

	DISTANCES DONNÉES			
	À LA MÉRIDIENNE,		À LA PERPENDICULAIRE,	
	en toises.	en mètres.	en toises.	en mètres.
Maisons..................	3,604. Est.	7,024.	2,027. Sud.	3,950^{m} 7^{d}
Thiais..................	1,997. Est.	3,892.	4,115. Sud.	8,020. 2.
Différence entre ces distances...	....	3,132.	....	5,069. 5.

Le point d'intersection *N* de la ligne indiquant la distance de *Maisons* à la méridienne, et de la ligne indiquant celle de *Thiais* à la perpendiculaire, forme, avec *Thiais* et *Maisons*, un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est la distance cherchée de *Thiais* à *Maisons*.

Dans ce triangle, on connaît
Le côté *N Maisons* = 3,132^{m}, dont le carré est de... 9,809,424^{m}
Le côté *N Thiais* = 4,069, dont le carré est de... 16,556,761.

Somme des carrés.......... 26,366,185.

Cette quantité exprime le carré de l'hypoténuse *Maisons*, *Thiais*, dont la racine est de 5,126^{m} pour........................ 26,275,876^{m}
de 5,127 pour........................ 26,286,129.

On prendra 5,127 mètres, comme quantité plus rapprochée et pour éviter une fraction.

NOTE 4.

LES tours d'horizon sont peu nombreux ; car dans près de 1,700 grands triangles que donnent les diverses chaînes qui couvrent le territoire décrit par *Cassini*, il ne se trouve qu'environ soixante tours d'horizon.

On pourra y suppléer au moyen de quelques points donnés par les triangles du second ordre, qui compléteront souvent ces tours d'horizon.

En cas d'impossibilité de former des tours d'horizon, on peut prendre des points intermédiaires dans l'intérieur des triangles observés et déterminés.

La planche deuxième a pour objet d'indiquer la manière la plus sûre de construire les tours d'horizon, pour pouvoir en rapprocher et combiner les divers élémens.

NOTE 5.

ON sait qu'un triangle, considéré géodésiquement dans une suite d'opérations liées entre elles et rattachées à un centre commun, peut être regardé comme composé de douze parties ; savoir, les trois angles, les trois côtés, la distance à la méridienne de chacun des sommets d'angle, et la distance de ces sommets à la perpendiculaire. On peut y ajouter les trois angles d'inclinaison faits, par chacun des trois côtés, avec la méridienne.

Exemple d'une rectification :

Soit le triangle *Douai*, *Cambrai*, *le Quesnoi* (*voir* planche 3) : la Description géométrique de la France présente une discordance frappante dans l'énoncé de quelques-unes des parties de ce triangle, et ne donne point la distance de *Douai* à la méridienne, ni sa distance à la perpendiculaire.

On connaît dans ce triangle, des douze choses qui le constituent (en le considérant géodésiquement dans la chaîne à laquelle il appartient), sept choses ; savoir, les trois angles, un côté (celui de *Douai* à *Cambrai*),

deux distances à la méridienne (celles de *Cambrai* et du *Quesnoi*), et une distance à la perpendiculaire (celle du *Quesnoi*). *

Mais les côtés (ceux du *Quesnoi* à *Cambrai* et du *Quesnoi* à *Douai*) sont donnés avec inexactitude : la distance à la méridienne de *Douai* est fautive ; celles de *Douai* et de *Cambrai* à la perpendiculaire présentent également des erreurs.

Il a fallu d'abord rétablir ou déterminer les côtés qui manquaient.

Côtés.

Celui du *Quesnoi* à *Cambrai* a été obtenu par cette proportion :

Sin. 34° 15′ 30″ : 12,331 toises :: sin. 45° 5′ 5″ : $x =$ 15,513 toises.

Le côté de *Douai* au *Quesnoi* a été obtenu par cette proportion :

Sin. 34° 15′ 30″ : 12,331 toises :: sin. 109° 39′ 15″ : $x =$ 21,527 toises.

On a ainsi connu les trois angles et les trois côtés du triangle.

Distances à la méridienne.

A l'égard des distances à la méridienne, voici comme on a trouvé la distance de *Douai* à la méridienne de Paris, seule distance qui restait à obtenir, puisque l'on connaissait celle du *Quesnoi* et celle de *Cambrai.*

La distance du *Quesnoi* à la méridienne est de............ 47,625ᵗ

Celle de *Cambrai* à la méridienne est de............... 32,714.

Différence entre les méridiennes du *Quesnoi* et de *Cambrai*... 14,911.

Cette différence forme un côté du triangle *B G C*, rectangle en *G*, dans lequel on connaît,

1.° L'hypoténuse *B C*, qui est la longueur de *Cambrai* au *Quesnoi*, côté du triangle vérifié *Douai*, *le Quesnoi*, *Cambrai*, trouvé de 15,513 toises ;

* *TABLEAU des seules choses reconnues bonnes dans le Triangle.*

SOMMETS des ANGLES.	OUVERTURE des ANGLES.	EXTRÉMITÉ des CÔTÉS.	LONGUEUR des côtés en toises.	DISTANCES EN TOISES à la méridienne.	DISTANCES EN TOISES à la perpendicul.
Douai.....	45° 5′ 5″	Du *Quesnoi* à *Cambrai*....	"	"	"
Cambrai...	100. 39. 25.	Du *Quesnoi* à *Douai*.......	"	32,714ᵗ	"
Le Quesnoi.	34. 15. 30.	De *Douai* à *Cambrai*.....	12,331ᵗ	47,625.	80,939ᵗ
	180. " "				

2.°

2.° Le côté *GC*, différence des méridiennes du *Quesnoi* et de *Cambrai*, trouvée de 14,911 toises ;

3.° L'angle droit *BGC*.

On a obtenu l'angle d'inclinaison *GBC* par cette proportion : 15,513 : 14,911 :: le sinus d'un angle droit ou $R : x =$ sinus 73° 59', valeur de l'angle *GBC*.

Ce premier angle d'inclinaison trouvé, on s'en est servi pour obtenir l'angle *ACE*.

En effet, $GBC = BCI$.

Or, $BCI + BCL + LCE =$ .... 180°

$BCI = GBC$ a été trouvé de.....	73° 59'	108° 14' 30"
$BCL = BCA$ a été trouvé de.....	34. 15. 30"	
L'angle inconnu *LCE* est donc de..............		71. 45. 30.

Pour trouver l'angle *ABD*, inclinaison du côté de *Cambrai*, il suffisait de retrancher de *ABC* trouvé de.................. 100° 39' 25"
GBC connu, et égal à......................... 73. 59. ″

Valeur de *ABD*............... 26. 40. 25.

Les trois angles d'inclinaison ainsi connus, on a déterminé la véritable distance à la méridienne de *Douai*, qui manquait.

La distance connue du *Quesnoi* à la méridienne est de 47,625 toises.

Pour trouver celle de *Douai*, il ne faut que connaître la distance existante entre le méridien de *Douai* et celui du *Quesnoi*, ou la ligne *CF*, qui est égale par construction à *EA*.

Or, dans le triangle *EAC*, on connaît l'hypoténuse *AC* et l'angle d'inclinaison *ACE*. On connaîtra donc *AE* par cette proportion :

R : sin. 71° 45' 30" :: 21,527^t : $AE =$ .... 20,445^t

La distance du *Quesnoi* à la méridienne de Paris étant de.... 47,625.
celle de la méridienne du *Quesnoi* à celle de *Douai*, de....... 20,445.

restera pour la distance de *Douai* à la méridienne de Paris..... 27,180.

Deux distances à la perpendiculaire de la méridienne de Paris manquent ; savoir, celle de *Douai* et celle de *Cambrai*. Il faut les déterminer.

Distance de *Douai* à la perpendiculaire.

On connaît la distance du *Quesnoi* à la perpendiculaire de Paris ; cette distance est de.................................... 80,939^t

Il faut, au moyen de ce que *Douai* se trouve plus au nord que *le Quesnoi*, ajouter à cette quantité l'étendue qui se trouve entre la parallèle à la perpendiculaire passant par *le Quesnoi*, et la parallèle à cette dernière ligne passant par *Douai* ; c'est le côté *FA* du triangle rectangle *FAC*.

Dans ce triangle, on connaît,

1.° L'hypoténuse *AC* ;

2.° L'angle *EAC*, qui, avec l'angle *FAC*, est égal à 90°.

On pourra donc résoudre le triangle, et l'on obtiendra pour le côté *FA* cherché................................. 6,739^t

Distance de *Douai* à la perpendiculaire de Paris.......... 87,678.

A l'égard de la distance de *Cambrai* à la perpendiculaire, *Cambrai* étant plus au midi que *le Quesnoi*, il faut de la distance donnée pour *le Quesnoi*, qui est de.. 80,939^t
retrancher l'étendue qui se trouve entre la parallèle à la perpendiculaire passant par *le Quesnoi*, et la parallèle à cette dernière ligne passant par *Cambrai* ; c'est le côté *GB* du triangle *GBC* rectangle en *G*.

Or, dans ce triangle, on connaît,

1.° L'hypoténuse *BC* ;

2.° Le côté *GC*, différence des distances à la méridienne des deux points, *Cambrai* et *le Quesnoi*.

On obtiendra pour le côté *GB*...................... 4,280^t

Distance de *Cambrai* à la perpendiculaire de Paris....... 76,659.

Le triangle *Douai*, *Cambrai*, *le Quesnoi*, donné d'une manière incomplète ou fautive dans la Description géométrique de la France, se trouvant

compris dans l'ouvrage intitulé *la Méridienne vérifiée*, on va rapprocher le triangle, ainsi rectifié, de celui donné par ce dernier ouvrage.

SOMMETS des ANGLES.	OUVERTURE des ANGLES.	EXTRÉMITÉS des CÔTÉS.	LONGUEUR en toises des côtés, d'après		DISTANCES EN TOISES à la méridienne, d'après		à la perpendiculaire, d'après	
			la rectification.	la méridienne.	la rectification.	la méridienne.	la rectification.	la méridienne.
Douai.....	45° 5' 5"	*Le Quesnoi, Cambrai.*	15,513'	15,513'	27,180'	27,180'	87,678'	87,679'
Le Quesnoi.	34. 15. 30.	*Cambrai, Douai*.....	12,531.	12,331.	47,625.	47,625.	80,939.	80,937.
Cambrai...	100. 39. 25.	*Douai, le Quesnoi*...	21,527.	21,527.	32,714.	32,714.	76,659.	76,659.

On remarquera qu'ici la Description géométrique de la France et la Méridienne vérifiée donnent absolument les mêmes angles dans le triangle qu'on a rectifié : on serait également parvenu à rétablir les angles par la connaissance des parties reconnues bonnes, si ces angles avaient présenté quelque inexactitude.

NOTE 6.

LA construction du tableau d'assemblage dont il s'agit, présente plusieurs avantages qui seront développés.

On remarquera, quant à présent, que, pour la bonne exécution de ce travail, il faut se procurer une table solidement assemblée, et dont le bois soit le moins susceptible de varier. Cette table sera établie dans les dimensions prescrites par l'étendue et la forme du département : on y fixera le papier destiné à recevoir l'ensemble du canevas, ainsi que les points de rattachement pris dans les départemens environnans.

NOTE 7.

CE tableau d'assemblage non-seulement est indispensable pour bien fixer l'ensemble de la triangulation d'un département, mais il facilite et assure l'exactitude du tracé des carrés des plans à un nombre rond de mille mètres de la méridienne de Paris et de sa perpendiculaire.

En effet, il suffit d'obtenir sur ce tableau, et d'après les moyens indiqués par l'Instruction du 26 ventôse an 12 (sur les carrés des plans), un point d'intersection de deux lignes qui se couperont à angle droit, et dont

l'une sera parallèle à un nombre rond de mille mètres à la méridienne de Paris, et l'autre également parallèle à un nombre rond de mille mètres à sa perpendiculaire. Cette intersection servant de point de départ, on tracera, sur le tableau d'assemblage, des carrés de centimètres, qui, développés à l'échelle d'un à cinq mille, et dès-lors convertis en décimètres, formeront les carrés des plans.

Ces carrés se trouveront, par cette opération, indiqués d'avance sur les rouleaux dont les minutes de ces plans doivent être formées, ainsi qu'on le verra dans l'application de la triangulation au levé du plan.

NOTE 8.

LES carrés du tableau d'assemblage étant d'*un centimètre* de base sur *un centimètre* de hauteur, représenteront sur le terrain cinq cents mètres en côtés. On pourra ne coter ces carrés que de deux en deux, c'est-à-dire, de *mille* en *mille* mètres : ce qui donnera sur-le-champ, 1.° le nombre des lignes qui, menées à un nombre rond de mille mètres de la méridienne de Paris et de sa perpendiculaire, traverseront tout ou partie du territoire du département ; 2.° la distance de ces lignes soit entre elles, soit à l'Observatoire de Paris, auquel elles se rattachent.

NOTE 9.

VOICI la forme dans laquelle devra être dressé le Tableau indicatif de la longueur des Lignes, et de l'ouverture des Angles qui déterminent la véritable circonscription du territoire de la Commune.

LONGUEUR de chaque partie de la Ligne de circonscript.on	SA DIRECTION.	ANGLE que fait chaque partie avec celle qui la précède.			OBSERVATIONS.
		INDICATION de l'Angle.	VALEUR de l'Angle.		
Mètres.			Dég.	Min.	
325. "	Sud-est......	"	"	"	Du buisson appelé *la Borne* n.° 1.
310. 6.	Nord-est.....	Extérieur.....	97.	10.	.... 2, 3 et 4.
143. 2.	Sud-est......	Intérieur......	85.	15.	
225. "	Nord-ouest...	Ligne courbe..	"	"	Du ruisseau de
920. "	Nord.......	Ligne droite...	"	"	Du chemin de
60. "	Est-sud-est...	Extérieur.....	71.	"	De la borne n.° 5.
420. "	Ligne.......	Circulaire.....	"	"	De l'orle le long des prairies.
308. "	Sud-est......	"	"	"	D'une croix de pierre dite *la Croix de*
229. "	Est-sud-est...	Intérieur......	108.	"	Et de la borne n.° 6.

NOTE 10.

On doit pourtant observer que, quelle que soit l'exactitude du canevas, il arrivera assez souvent que le troisième rayon passera un peu à droite ou à gauche du point de rencontre des deux premiers rayons, par la raison que le mécanisme de l'opération ne peut que très-difficilement atteindre la précision mathématique : cependant, quand les triangles sont semblables, le rouleau soigneusement tendu, et la planchette bien horizontale et orientée, la déviation du troisième rayon doit être peu sensible, et l'intersection des trois rayons ne présenter, tout au plus, qu'un écart qui sera indiqué par un petit triangle dont la surface se trouvera couverte par l'épaisseur des trois côtés légèrement exprimés ; mais, à mesure que le géomètre négligerait de prendre les précautions nécessaires, l'écart pourrait être tel, qu'il déplaçât de plusieurs mètres le point de station, et, par conséquent, le détail du plan qu'on leverait de ce point erroné. Il s'ensuivrait encore que, pour redresser cette erreur et faire concorder le travail de cette fausse station avec celui des stations antécédentes et subséquentes, on serait réduit à rétrécir d'un côté, et à élargir de l'autre, plusieurs polygones qui, dès-lors, ne pourraient pas résister aux épreuves de la vérification. On ne saurait donc assez recommander aux géomètres de s'assurer de leurs stations, puisque c'est de l'exactitude de ces points de départ que dépend, en grande partie, celle du figuré du plan.

Lorsque l'intersection des trois rayons n'a pas précisément lieu sur le même point, on partage la différence en adoptant pour station le centre du petit triangle dont on a déjà parlé,

Des vérificateurs ont porté les choses au point de présenter comme erreur de nature à faire rejeter des plans, la différence de quelques minutes sur un tour d'horizon.

La planche 2.e en offre un pris sur le point même de l'Observatoire de Paris, et calculé d'après des données résultant d'observations faites avec soin. Quelque exactitude qu'on ait pu mettre à combiner les élémens de ce tour d'horizon, il s'y trouve cependant une erreur de *six minutes* en moins ; mais il faut remarquer que cette erreur sur un tour d'horizon formé de *dix triangles* dont les côtés les plus grands ont environ dix mille mètres, est peu considérable relativement à l'échelle du plan.

En effet, le rayon supposé de dix mille mètres, le diamètre dès-lors de vingt mille, la circonférence d'un peu moins de soixante-trois mille mètres, le degré sera de cent soixante-quinze mètres, la minute d'un peu moins de trois mètres; et dès-lors les six minutes d'environ dix-sept mètres cinq décimètres, qui, à l'échelle d'*un à cinquante mille*, sont représentés, sur la planche n.° 2, par un tiers de millimètre; et par *trois millimètres et demi* à l'échelle d'*un à cinq mille*, qui est celle des plans du cadastre.

FIN DU DÉVELOPPEMENT.

MANUEL
DE L'INGÉNIEUR DU CADASTRE.

CHAPITRE I.er

DE LA TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

PAR A. A. L. REYNAUD *.

§. I.er

1. DANS le levé des plans, les opérations les plus composées se réduisent à résoudre des triangles. La connaissance parfaite de tout ce qui est relatif à la construction et au calcul des triangles, devient donc indispensable aux Ingénieurs du cadastre.

Il existe un grand nombre d'excellens Traités sur la trigonométrie ; mais ces Traités, qui supposent des connaissances préliminaires assez étendues, contiennent des théories étrangères au levé des plans, et des méthodes variées qui ne sont pas toujours les plus expéditives, lorsqu'il s'agit de la pratique.

Le but de ce premier chapitre est donc de ne présenter que les théories indispensables aux Ingénieurs du cadastre. On donnera les méthodes les plus simples et les plus directes pour construire et calculer les triangles ; on levera toutes les difficultés qui peuvent s'offrir, et l'on donnera les moyens de reconnaître les erreurs ; on aura soin de faire apercevoir

* Les renvois à l'arithmétique se rapportent au Traité d'arithmétique à l'usage des Ingénieurs du cadastre, par *Reynaud.*

Les élèves qui desireront de plus grands détails, pourront consulter la Trigonométrie analytique de *Reynaud.* Cette Trigonométrie est suivie des tables de logarithmes dont on fera usage dans cette Instruction.

Ces différens ouvrages se trouvent à Paris, chez *Courcier,* Libraire, quai des Augustins, n.° 57.

l'accord parfait qui règne entre le calcul et les constructions ; enfin l'on donnera la solution complète du problème général de la *Trigonométrie :*

Connaissant trois des cinq parties distinctes d'un triangle, déterminer les parties inconnues, avec le degré d'exactitude nécessaire aux opérations du cadastre actuel.

La solution de ce problème exige quelques connaissances préliminaires, que nous rappellerons d'abord ; nous nous occuperons ensuite de la construction des triangles rectangles et obliquangles ; nous indiquerons les procédés graphiques les plus expéditifs et les plus rigoureux à employer pour y parvenir ; nous examinerons les relations qui doivent exister entre les diverses parties d'un triangle pour que ce triangle soit *possible*, et nous donnerons des *caractères* certains, auxquels on reconnaîtra si un triangle peut exister.

Pour conduire au calcul des triangles, nous ferons apercevoir les inconvéniens des procédés purement graphiques ; nous donnerons les formules les plus simples pour calculer les parties inconnues des triangles ; nous appliquerons ces formules à des exemples qui réuniront toutes les difficultés ; nous donnerons une méthode nouvelle pour calculer les longueurs des lignes trigonométriques ; nous formerons ensuite les logarithmes de ces lignes ; enfin nous terminerons ce premier chapitre en donnant la solution d'un problème qui sert à déterminer, sur la carte, le point de station sur le terrain. (*Voyez* n.° 84.)

Connaissances nécessaires à l'intelligence de ce premier chapitre.

2. Pour comprendre cette première note, il faut connaître l'*arithmétique* et la partie de la *géométrie* qui traite des lignes et des surfaces. On doit sur-tout se rappeler les principes suivans :

Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.

Le logarithme du quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.

Le logarithme d'une fraction est égal au logarithme du numérateur moins le logarithme du dénominateur.

Le logarithme du CARRÉ *est égal au double du logarithme de la* RACINE.

Le quatrième terme d'une proportion s'obtient en divisant le produit des MOYENS *par l'*EXTRÊME *connu.*

Le logarithme du quatrième terme d'une proportion s'obtient en retranchant de la somme des logarithmes des MOYENS, *le logarithme de l'*EXTRÊME *connu.*

Dans un triangle, les plus grands côtés sont toujours opposés aux plus grands angles, et la somme des trois angles vaut deux angles droits, ou 180 degrés de l'ancienne division de la circonférence. Conséquemment, un triangle renferme nécessairement deux angles aigus ; le seul angle qui puisse être droit ou obtus, est l'angle opposé au plus grand côté.

Lorsqu'on connaît deux angles d'un triangle, on trouve le troisième, en ôtant de 180 degrés la somme des angles connus ; le reste exprime l'angle demandé.

Dans un triangle rectangle, un angle aigu vaut 90 degrés moins l'autre angle aigu.

Deux triangles sont SEMBLABLES,

1.° Lorsque leurs côtés sont parallèles ou perpendiculaires ;

2.° Lorsque leurs angles sont égaux chacun à chacun, de sorte que deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal ;

3.° Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels ;

4.° Lorsque leurs côtés sont proportionnels.

3. Pour écrire les calculs d'une manière plus abrégée, nous ferons usage des *signes* algébriques........ $+$ $-$ $=$ $\times$ $:$
qui signifient respectivement... *plus, moins, égal, multiplié par, divisé par.*

Ainsi, par exemple,

$$5 + 2 - 4 = 3 \times 4 - 18 : 2,$$

signifie que 5 plus 2 moins 4, est égal à 3 multiplié par 4, moins 18 divisé par 2. De même,

$$3 \times 4 - 6 : 2 = 11 - 2,$$

exprime que 3 multiplié par 4, moins 6 divisé par 2, est égal à 11 moins 2.

La multiplication s'indique quelquefois en mettant un point entre le multiplicande et le multiplicateur. Ainsi, 2×3 et $2 . 3$, expriment également le produit de 2 par 3, ou 6.

De même, $\frac{12}{2}$ et $12 : 2$, indiquent également la division de 12 par 2.

Pour indiquer que 8 est plus grand que 3, nous écrirons $8 > 3$; et $5 < 8$ signifiera que 5 est plus petit que 8.

Pour indiquer le produit d'une quantité par elle-même, ou son *carré*,

nous placerons le chiffre 2 sur la droite de cette quantité, et un peu au-dessus; ainsi 7^2 exprimera 7 fois 7, ou 49; le carré de 9 sera 9^2, ou 9 fois 9, ou 81.

Pour indiquer la *racine* carrée d'une quantité, on écrit cette quantité sous le *signe* $\sqrt{(\ )}$. Ainsi $\sqrt{(36)}$ signifie la racine carrée de 36; sa valeur est 6. De même, $\sqrt{(81)}$ exprime la racine carrée de 81; sa valeur est 9.

Les quantités affectées du *signe* + sont dites *positives*, et les quantités affectées du *signe* — sont dites *négatives*. Ainsi + 8 est une *quantité positive*, et — 8 est une *quantité négative*.

La *racine* carrée d'une quantité négative n'existant pas, est dite *imaginaire*. Ainsi $\sqrt{(-4)}$, $\sqrt{(-5)}$, sont des expressions *imaginaires*.

Le logarithme d'un nombre négatif est *imaginaire*. Ainsi le logarithme de — 3 est IMAGINAIRE.

TRIGONOMÉTRIE.

4. *Le but de la trigonométrie est la résolution des triangles.* La géométrie nous apprend à mesurer l'étendue; mais ce n'est que dans un petit nombre de cas qu'elle applique ses opérations aux objets inaccessibles: elle n'en peut faire aucune sans le secours des instrumens; et ceux-ci, quelque soin qu'on apporte à leur construction, présentent quelquefois des défectuosités; de sorte que les résultats obtenus par leur secours atteignent rarement le degré d'exactitude nécessaire. Le calcul, au contraire, suit la marche rapide de la pensée, et traverse avec elle l'immensité de l'espace; il conserve toujours la certitude des principes dont il émane; et ce n'est que parce qu'on est obligé de joindre à ses élémens des mesures *graphiques*, que les résultats qu'il fournit ne sont pas entièrement à l'abri de l'erreur.

Les Géomètres doivent donc avoir le plus grand soin, dans les opérations très-délicates, de substituer, autant qu'il sera possible, le calcul aux constructions; ils y parviendront avec le *graphomètre*, et la *planchette* servira à détailler les grands polygones déterminés avec le graphomètre.

Les figures qu'on se propose de mesurer sur la surface de la terre, ne sont pas rigoureusement rectilignes. Quand il s'agit de calculer des distances considérables, on ne doit plus regarder les côtés des triangles comme des lignes droites. Ces côtés forment alors des arcs de grand cercle; et même, comme la terre n'est pas parfaitement sphérique, les côtés

des grands triangles sont des arcs *elliptiques*. Les savans qui ont mesuré plusieurs degrés terrestres avec une exactitude jusqu'alors inconnue, ont eu égard à cette courbure ; ils ont trouvé que la longueur d'un degré terrestre est de 57008 toises. Mais cette grande rigueur devient inutile dans les opérations relatives au *Cadastre* actuel, dont le principal but est l'utilité ; et d'ailleurs M. *Hautier* s'étant chargé des calculs relatifs aux grands triangles de *Cassini*, et M. *Delambre* ayant bien voulu communiquer des notes précieuses relatives à ces triangles, nous ne considérerons que des triangles de peu d'étendue, dont les côtés pourront être regardés comme des lignes droites, vu leur extrême petitesse par rapport au rayon du globe terrestre ; et comme le triangle rectiligne est l'élément des figures rectilignes, il suffira de pouvoir déterminer ses parties pour mesurer un polygone quelconque.

5. Un triangle *A B C* (*fig. 10*) offre trois angles et trois côtés. Pour plus de *symétrie*, nous désignerons toujours les trois angles par les *lettres majeures* *A*, *B*, *C* mises aux sommets de ces angles, et les trois côtés opposés par les petites lettres *a*, *b*, *c* correspondantes ; de sorte que *a*, *b*, *c* représenteront les côtés opposés aux angles *A*, *B*, *C*.

Pour faciliter l'intelligence des constructions et des calculs, nous placerons les parties connues sur les figures, nous ponctuerons les parties inconnues, et les *données* seront en lignes pleines.

Construction des Triangles.

6. Afin de nous diriger dans le calcul des triangles, nous examinerons d'abord comment on peut les construire, et nous leverons toutes les difficultés qui peuvent s'offrir. Nous appliquerons ensuite le calcul aux constructions.

Comme dans un triangle chaque angle vaut 180° moins la somme des deux autres, deux angles déterminent le troisième ; et conséquemment, *dans un triangle, il n'existe que cinq parties réellement distinctes, deux angles et trois côtés.*

7. La connaissance de trois de ces cinq parties étant indispensable, mais suffisante, pour construire un triangle, il s'agit de résoudre ce problème général : *Connaissant trois des cinq parties d'un triangle, trouver par*

construction les parties inconnues, c'est-à-dire, construire géométriquement le triangle.

8. *Lorsqu'on sait que le* TRIANGLE *à construire est* RECTANGLE, *la connaissance de deux parties suffit ;* car l'angle droit qui est connu, complète les trois parties données.

Soit *(fig. 1.re)* le triangle *A B C*, rectangle en *B*. Les deux *parties connues* se combinent des cinq manières suivantes :

1.° (Fig. 1.re) *a*, *c*, c'est-à-dire, *les deux côtés de l'angle droit ;*

2.° (Fig. 2) *b*, *a*, c'est-à-dire, *l'hypoténuse et un côté de l'angle droit ;*

3.° (Fig. 3) *b*, *A*, c'est-à-dire, *l'hypoténuse et un angle aigu ;*

4.° (Fig. 4) *A*, *c*, c'est-à-dire, *un angle aigu et le côté de l'angle droit adjacent à cet angle aigu ;*

5.° (Fig. 5) *A*, *a*, c'est-à-dire, *un angle aigu et le côté de l'angle droit opposé à cet angle aigu.*

9. Dans un *triangle obliquangle*, les trois parties connues ne peuvent se combiner que de cinq manières différentes ; ce qui fournit les cinq cas suivans :

Construire le triangle, connaissant,

1.° (Fig. 6) *A*, *C*, *b*, c'est-à-dire, *deux angles et le côté adjacent ;*

2.° (Fig. 7) *A*, *C*, *c*, c'est-à-dire, *deux angles et le côté opposé à l'un d'eux ;*

3.° (Fig. 8) *a*, *c*, *A*, c'est-à-dire, *deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ;*

4.° (Fig. 9) *a*, *b*, *C*, c'est-à-dire, *deux côtés et l'angle compris ;*

5.° (Fig. 10) *a*, *b*, *c*, c'est-à-dire, *les trois côtés.*

Construction des Triangles rectangles.

10. I.er PROBLÈME (fig. 1.re). *On connaît les deux côtés* a, c *de l'angle droit* B.

Tirez deux lignes *B H*, *B K*, qui se coupent à angle droit au point *B ;* portez *a* de *B* en *C*, *c* de *B* en *A*, et menez *A C ;* le triangle sera construit. L'hypoténuse *b* et les angles *A*, *C* se trouveront ainsi déterminés. Il est à remarquer qu'on aurait pu construire le triangle *A B C* aussi bien à la gauche qu'à la droite de la ligne *AB*, et au-dessous qu'au-dessus

de BC; en sorte que les mêmes données conviennent aux triangles ABC, ABC', $A'BC'$, $A'BC$. Ces triangles seraient égaux, il est vrai, au triangle ABC; mais la position de leurs parties ne serait pas la même par rapport à la ligne BC. Dans le levé d'un plan, cette position, qui sert à déterminer celle de certains points remarquables, n'est pas indifférente. Ainsi, lorsqu'on a choisi la ligne BC pour représenter une direction fixe, il est essentiel de ne pas oublier la position que doivent avoir les autres parties à l'égard de cette ligne. On devra faire la même observation sur toutes les constructions.

11. IIe PROBLÈME (fig. 2). *On connaît l'hypoténuse* b *et un côté* a *de l'angle droit.* Ayant formé l'angle droit B par deux droites BH, BK, portez a de B en C; et de C, comme centre, avec le rayon b, décrivez un arc mn qui coupe BH en A; menant AC, le triangle sera construit. Cette construction ne pourrait plus s'exécuter, si l'hypoténuse b n'était pas plus grande que le côté a de l'angle droit; car l'arc décrit du point C comme centre avec le rayon b, ne couperait pas AB. Et en effet, le problème est alors impossible : car demander de construire un triangle rectangle avec une hypoténuse moindre que l'un des côtés de l'angle droit, ou qui lui soit égale, c'est vouloir mener d'un point C, pris sur une perpendiculaire BC à AB, une oblique plus courte que cette perpendiculaire, ou qui lui soit égale; ce qui est impossible.

12. IIIe PROBLÈME (fig. 3). *On connaît l'hypoténuse* b *et un angle aigu* A. Par l'intersection de deux lignes indéfinies AH, AK, formez l'angle A; portez b de A en C; du point C, menez CB perpendiculaire sur AH; le triangle sera construit.

13. IVe PROBLÈME (fig. 4). *On connaît un angle aigu* A *et le côté* c *de l'angle droit adjacent à cet angle.* Tirant deux lignes indéfinies BH, BK, qui se coupent à angle droit en B, portez c de B en A; par le point A, menez une droite AC, qui forme avec AB un angle égal à l'angle donné A; elle détermine ABC pour le triangle demandé.

14. Ve PROBLÈME (fig. 5). *On connaît un angle aigu* A *et le côté* a *de l'angle droit opposé à cet angle.* Formez l'angle A par deux droites indéfinies CD, CK; au point C, menez sur CD la perpendiculaire CB, égale au côté connu a; et de l'extrémité B, élevez BH perpendiculaire

sur CB. Le triangle ABC, rectangle en B, résoudra le problème ; car à cause des parallèles CD, BH, l'angle CAB est égal à l'angle donné A, sous lequel on a mené les lignes CD, CK.

Le problème est susceptible de cette autre solution. Par l'extrémité B d'une ligne $CB = a$, menez BH perpendiculaire sur BC ; par un point quelconque P, menez PQ, de manière que l'angle $QPB = A$; menant CK parallèle à QP, le triangle sera construit.

Construction des Triangles obliquangles.

15. Ier Problème (fig. 6). *On connaît les deux angles* A, C, *et le côté* b *qui leur est adjacent.* Par les extrémités d'une ligne AC, égale à b, menez les droites AH, CK, qui forment avec AC des angles HAC, KCA, respectivement égaux aux angles donnés A, C. La rencontre de ces droites au point B déterminera le triangle demandé.

16. IIe Problème (fig. 7). *On connaît deux angles* A, C, *et le côté* c *opposé à l'un d'eux.* Formez l'angle A par deux droites indéfinies AP, AQ ; à un point quelconque P de la ligne sur laquelle doit être placé l'angle C, formez cet angle par la ligne PQ ; portez c de A en B, et menez par le point B une parallèle BC à PQ ; elle déterminera le triangle demandé ABC. Si l'angle donné A était droit, il s'agirait de construire un triangle rectangle, dans lequel on connaîtrait un angle aigu C et le côté c de l'angle droit opposé à cet angle ; ce qui conduirait à la seconde construction du n.° 14.

17. IIIe Problème (fig. 8). *On connaît deux côtés* a, c, *et l'angle* A, *opposé à l'un d'eux.* Menez deux lignes indéfinies XZ, AY, sous l'angle connu A ; portez c de A en B ; et décrivez un arc du point B comme centre, avec le rayon a ; lorsque cet arc coupera l'indéfinie XZ en un point situé sur un des côtés de l'angle A, le triangle sera construit. Mais les grandeurs relatives des quantités connues a, c, A, offrent des circonstances remarquables, que nous allons analyser avec soin. L'angle donné A peut être égal à l'angle aigu BAZ, ou à l'angle obtus BAX.

Ier Cas. *L'angle* A *est égal à l'angle aigu* BAZ. Si du point B on abaisse sur XZ la perpendiculaire BP, on peut avoir,

1.° $\left\{\begin{matrix} a < c \\ a < BP \end{matrix}\right\}$; 2.° $\left\{\begin{matrix} a < c \\ a = BP \end{matrix}\right\}$; 3.° $\left\{\begin{matrix} a < c \\ a > BP \end{matrix}\right\}$; 4.° $\left\{\begin{matrix} a = c \\ a > BP \end{matrix}\right\}$; 5.° $\left\{\begin{matrix} a > c \\ a > BP \end{matrix}\right\}$.

Examinons

Examinons ces différens cas.

1.° *Lorsque le côté* a *est moindre que la perpendiculaire* BP, l'arc mn, décrit de B comme centre avec le rayon a, coupe BP en D, et ne rencontre pas XZ; *le triangle ne peut donc pas exister.* Et en effet, les données actuelles ne s'accordent pas avec la nature du triangle; car la condition $a < BP$ revient à proposer de joindre un point B à une droite XZ par une ligne plus courte que la perpendiculaire, ce qui est absurde.

2.° *Quand le côté* a *est égal à la perpendiculaire* BP, l'arc $m'n'$, décrit du point B comme centre avec le rayon $a = BP$, est tangent à XZ en P; ce qui détermine le *triangle rectangle* APB. *L'angle* BPA = C, *opposé au côté* c, *est alors droit.*

3.° *Quand le côté* a *est plus grand que la perpendiculaire* BP, *et moindre que le côté* c, l'arc $m''n''$, décrit de B comme centre avec le rayon a, coupe XZ en deux points C, C', également distans du pied P de la perpendiculaire BP, C' doit tomber entre A et P; car a étant moindre que $c = AB$, doit être plus près de la perpendiculaire BP. Dans ce cas, *la construction fournit deux triangles* ABC, ABC', *qui satisfont également:* car ils contiennent l'un et l'autre les données; savoir, l'angle $BAC = A$, et les côtés a, c.

Observez bien que dans les deux triangles BCA, BC'A, *les angles* BCA, BC'A, *qui expriment les deux valeurs de* C, *sont supplémens* (n.° 23) *l'un de l'autre;* car dans le triangle isocèle BCC', les deux angles aigus en C, C', sont égaux, et l'angle $AC'B$ a pour supplément $BC'C$, ou son égal BCA. Lorsqu'on appliquera le calcul à cette construction (n.° 68), on verra que l'angle C n'est connu que par son *sinus* (n.° 25), qui appartient également aux *angles supplémentaires* (n.° 26) BCA, $BC'A$. Le calcul sera toujours d'accord avec les constructions.

4.° *Quand le côté* a *est égal au côté* c, *et par conséquent plus grand que* BP, l'arc $m'''n'''$, décrit de B comme centre avec le rayon a, coupe XZ en deux points A, C'', qui déterminent le *triangle isocèle* BAC''.

5.° *Le côté* a *étant plus grand que* c, *et à plus forte raison que* BP, l'arc $m''''n''''$, décrit de B comme centre avec le rayon a, coupe XZ en deux points C''', Q; et le point A, extrémité d'une oblique $BA = c$ plus courte que $BQ = a$, tombe nécessairement entre P et Q. Les deux intersections C''', Q, paraissent indiquer la construction de deux triangles; mais si l'on observe que le triangle BAQ ne contient pas

l'angle donné $BAC = A$, on verra que *le triangle* BAC‴ *satisfait seul aux conditions du problème.*

II.ᵉ CAS. *L'angle* A *est égal à l'angle obtus* BAX. L'angle donné A étant obtus, l'angle inconnu C est nécessairement aigu (n.° 2); on doit donc avoir $A > C$; et par conséquent, *le côté* a, *opposé à l'angle connu* A, *doit être plus grand que le côté* c; *quand cette condition n'est pas remplie, le triangle ne peut pas exister.* La construction s'accorde avec ces considérations; en effet...

1.° *Si le côté* a, *opposé à l'angle connu* A, *est plus grand que l'autre côté* c, l'arc $m''''n''''$, décrit de B comme centre, avec le rayon a, coupera XZ en deux points Q, C''', qui détermineront deux triangles BAQ, BAC'''; mais le second triangle ne contenant pas l'angle donné $BAX = A$, on voit que *le triangle* BAQ, *toujours possible, satisfait seul aux conditions du problème.*

2.° *Si le côté* a *n'est pas plus grand que le côté* c, alors l'arc décrit de B comme centre avec le rayon a, ne pourra pas couper XZ, à gauche du point A; car les obliques le plus longues s'écartent le plus de la perpendiculaire: *les données ne peuvent donc appartenir à aucun triangle.*

18. IV.ᵉ PROBLÈME (fig. 9). *On connaît deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C. Tirez deux lignes indéfinies CH, CK, sous l'angle connu C; portez b de C en A, et a de C en B; menant AB, le triangle sera construit. Si les côtés a, b, étaient égaux, la construction déterminerait un triangle isocèle, dans lequel les angles A, B, opposés aux côtés égaux a, b, seraient égaux.

19. V.ᵉ PROBLÈME (fig. 10). *On connaît les trois côtés* a, b, c. Soit b le plus grand des trois côtés; menez une droite AC égale à b; des points A, C, comme centres, avec les rayons c, a, décrivez les arcs mn, $m'n'$; de leur intersection B, menant aux points A, C, les droites BA, BC, elles détermineront ABC pour le triangle demandé. *La construction réussira toujours, quand les données s'accorderont avec la nature du triangle;* car alors le plus grand côté étant plus petit que la somme des deux autres, les arcs se couperont nécessairement.

Si le côté b *était égal à la somme des deux autres*, les arcs $m''n''$, $m'''n'''$, décrits des points A, C, comme centres, avec les rayons c, a, se toucheraient en un point B', situé sur AC; *les côtés* c, a, *se confondraient avec la base* b;

les angles A, C, *formés par ces côtés avec la base, seraient nuls ; l'angle* B, *formé par les côtés* a, c, *qui sont en ligne droite, vaudrait deux angles droits, ou 180 degrés, et la surface du triangle serait nulle.*

Si le côté b *était plus grand que la somme des deux autres côtés* a, c, les arcs *m″n″*, *st*, décrits des points *A*, *C*, comme centres, avec les rayons *c*, *a*, ne se rencontreraient pas; les côtés *c*, *a*, ne pourraient donc pas se réunir en un même point : *le triangle n'existerait donc pas.* Et en effet, la ligne droite étant la plus courte distance entre deux points, *un côté d'un triangle ne peut jamais être plus grand que la somme des deux autres.*

20. Les constructions que nous venons d'exécuter, conduisent à cette règle générale. *Un* TRIANGLE RECTANGLE *peut toujours se construire, lorsqu'on connaît les deux côtés de l'angle droit, ou un angle aigu et l'hypoténuse, ou un angle aigu et l'un des côtés de l'angle droit. Il devient impossible, lorsque, connaissant l'hypoténuse et un côté de l'angle droit, l'hypoténuse n'est pas plus grande que ce côté de l'angle droit.*

Un TRIANGLE OBLIQUANGLE *est toujours possible, lorsqu'on connaît deux angles et un côté, ou deux côtés et l'angle compris. Il devient impossible dans trois cas : 1.° lorsque, connaissant les trois côtés, le plus grand n'est pas plus petit que la somme des deux autres ; 2.° lorsque, connaissant deux côtés et l'angle aigu opposé à l'un d'eux, le côté opposé à l'angle connu est moindre que la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du côté connu adjacent à cet angle, sur l'autre côté ; 3.° lorsque, connaissant deux côtés et l'angle obtus opposé à l'un d'eux, le côté connu opposé à cet angle obtus n'est pas plus grand que l'autre côté connu.*

21. Ce qui précède donne le moyen de construire les triangles dans tous les cas possibles ; mais, en réfléchissant sur ces constructions, on aperçoit aisément combien l'on doit peu compter sur leur exactitude, tant à cause de la difficulté de faire un angle rigoureusement égal à un autre, que par celle de déterminer le point de rencontre de deux lignes qui se coupent sous un angle très-aigu. Or le calcul donne le moyen d'approcher des valeurs des quantités d'aussi près qu'on veut : il est donc de la plus grande importance de substituer le calcul aux constructions ; ce qui conduit à ce problème général :

22. *Connaissant, en nombres, trois des cinq parties d'un triangle, calculer les valeurs numériques des autres parties.* La solution de ce problème est l'objet de la *Trigonométrie* proprement dite.

B 2

23. *Deux angles qui, pris ensemble, valent un angle droit, ou 90°, sont* COMPLÉMENS *l'un de l'autre. Deux angles qui, pris ensemble, valent la demi-circonférence, ou 180°, sont* SUPPLÉMENS *l'un de l'autre.* Ainsi, le *complément* de 60° est 30°, et le *supplément* de 100° est 80°. En général, *si* p *désigne un arc ou un angle quelconque, son complément sera* (90° — p), *et son supplément sera* (180° — p). *Les angles* (90° + p) *et* (90° — p), *qui, pris ensemble, valent* 180°, *sont donc supplémens l'un de l'autre.* Conséquemment, *dans un triangle, chaque angle est le supplément de la somme des deux autres angles; et dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémens l'un de l'autre.*

24. On parvient à résoudre les triangles, en les comparant à d'autres triangles dont les parties ont été calculées. Ces parties sont les *lignes trigonométriques* nommées *sinus, cosinus, tangentes, cotangentes, sécantes* et *cosécantes.* Voici les définitions de ces lignes :

25. *Le* SINUS *d'un arc, ou de l'angle mesuré par cet arc, est la perpendiculaire abaissée de l'une des extrémités de l'arc sur le diamètre qui passe par l'autre extrémité.* Ainsi (*fig. 11*), *le sinus* de l'arc AB, ou de l'angle aigu ACB, est la perpendiculaire BP abaissée d'une extrémité B de l'arc AB sur le diamètre AG qui passe par l'autre extrémité A. De même, MD est le sinus de l'arc AM, ou de l'angle obtus MCA.

Si, à l'extrémité A du rayon CA, on mène AT perpendiculaire sur AC, jusqu'à la rencontre de CB prolongé, la ligne AT s'appelle la *tangente* et CT la *sécante* de l'arc AB, ou de l'angle ACB.

Soit menée CE perpendiculaire sur AG, l'arc AE vaudra le quart de la circonférence, ou 90°; si des points B, E on mène BQ et ES perpendiculaires à CE, les lignes BQ, SE, CS, seront pareillement les sinus, tangente et sécante de l'arc BE, complément de AB; on les appelle, pour abréger, les *cosinus*, *cotangente* et *cosécante*, de l'arc AB. Ainsi, BP, BQ, AT, ES, CT, CS, expriment respectivement le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente*, la *cotangente*, la *sécante* et la *cosécante* de l'arc AB, ou de l'angle BCA.

Dans les calculs, on écrit les mots........................
sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante, cosécante, de cette manière abrégée,
sin. cos. tang. cot. séc. cosec.

Les lignes CP, BQ étant égales, CP est le cosinus de AB. On

peut donc dire que *le cosinus est la distance du centre au pied du sinus.* Sous ce point de vue, le sinus de AM étant MD, le cosinus de AM sera CD.

Si l'on désigne l'arc AB, ou l'angle ACB, par p, on aura

$BP =$ sin. p ; $CP =$ cos. p ; $AT =$ tang. p ;
$ES =$ cot. p ; $CT =$ séc. p ; $CS =$ coséc. p.
$BQ =$ sin. $BE =$ sin. $(90° - p) = CP =$ cos. p ;
donc...... sin. $(90° - p) =$ cos. p.
$CQ =$ cos. $BE =$ cos. $(90° - p) = BP =$ sin. p ;
donc......cos. $(90° - p) =$ sin. p.

Prenons $GM = AB = p$; les arcs AM, AB, qui valent 180° à eux deux, seront supplémens l'un de l'autre : or les sinus MD, BP de ces arcs sont égaux, et tombent dans le même sens, par rapport à AG ; conséquemment,

26. *Deux arcs ou deux angles qui sont supplémens l'un de l'autre, ont des sinus égaux et de même signe.* Mais chaque angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres (n.° 23) ; *le sinus de la somme de deux angles d'un triangle est donc égal au sinus du troisième angle.*

Les cosinus CP, CD, des arcs supplémentaires AB, AM, sont de même longueur ; mais comme ils tombent dans des sens directement opposés, par rapport au point C, on les affecte des *signes* contraires $+$ et $-$.

27. Ainsi, *deux arcs ou deux angles qui, pris ensemble, valent* 180°, *ou qui sont supplémens l'un de l'autre, ont des cosinus égaux, mais de signes contraires. Le sinus et le cosinus d'un angle aigu étant donc positifs ; pour un angle obtus, le sinus est encore positif, mais le cosinus est négatif.*

28. En général, si p est un arc ou un angle quelconque, on aura

Sin. $p =$ sin. $(180° - p)$; d'où sin. $(90° + p) =$ sin. $(90° - p) =$ cos. p.

Cos. $p = -$ cos. $(180° - p)$; d'où cos. $(90° + p) = -$ cos. $(90° - p) = -$ sin. p.

On voit aussi, dans la figure, que si r désigne le rayon CA, on aura

(*fig.* 11). $\begin{cases} \text{Sin. } AE = \text{sin. } (90°) = CE = r \\ \text{Cos. } AE = \text{cos. } (90°) = 0. \end{cases}$

(Nous désignerons toujours le rayon des tables par r).

29. *Quand un angle aigu augmente, son sinus, sa tangente et sa sécante*

augmentent ; son complément, son cosinus, sa cotangente et sa cosécante diminuent. Le sinus et le cosinus ne peuvent jamais être plus grands que le rayon. La sécante ne peut jamais devenir plus petite que le rayon. La tangente passe par tous les états de grandeur, depuis zéro jusqu'à l'infiniment grand (arithmétique). *Conséquemment, un nombre plus petit que le rayon exprime toujours le sinus ou le cosinus d'un certain angle ; quand le sinus ou le cosinus d'un angle inconnu se trouve plus grand que le rayon, l'angle n'existe pas ; enfin, un nombre quelconque exprime toujours la tangente d'un certain angle.*

30. Si l'angle TCA (*fig. 11*) était de $45°$, son complément CTA serait aussi de $45°$; le triangle ACT serait isocèle, et l'on aurait $AT = AC = r$. Par conséquent, *la tangente de $45°$ est égale au rayon ; la tangente d'un angle aigu plus grand que $45°$, est plus grande que le rayon ; et la tangente d'un angle plus petit que $45°$, est plus petite que le rayon.* Mais le complément de $45°$ est $45°$; *et à mesure qu'un angle aigu augmente, son complément diminue.* Conséquemment, *la cotangente de $45°$ est égale au rayon ; la cotangente d'un angle aigu plus grand que $45°$, est moindre que le rayon ; et la cotangente d'un angle moindre que $45°$, est plus grande que le rayon.*

31. Les relations qui existent entre les grandeurs des lignes trigonométriques, se déduisent de la similitude des triangles CPB, CAT, CQB, CES (*fig. 11*). En effet, ces triangles donnent, en désignant l'arc AB, ou l'angle BCA, par p,

$$CP : PB :: CA : AT, \text{ ou } \cos. p : \sin. p :: r : \operatorname{tang}. p = \frac{r \sin. p}{\cos. p} ;$$

$$CQ : QB :: CE : ES, \text{ ou } \sin. p : \cos. p :: r : \cot. p = \frac{r \cos. p}{\sin. p} ;$$

$$CP : CB :: CA : CT, \text{ ou } \cos. p : r :: r : \text{séc}. p = \frac{r^2}{\cos. p} ;$$

$$CQ : CB :: CE : CS, \text{ ou } \sin. p : r :: r : \text{coséc}. p = \frac{r^2}{\sin. p} ;$$

$$BP^2 + CP^2 = CB^2, \text{ ou } \sin.^2 p + \cos.^2 p = r^2.$$

On en déduit

$$\cos^2 p = r^2 - \sin.^2 p ; \ \cos. p = \sqrt{(r^2 - \sin.^2 p)},$$
$$\sin.^2 p = r^2 - \cos.^2 p ; \ \sin. p = \sqrt{(r^2 - \cos.^2 p)}.$$

§. II.

Résolution des Triangles rectangles.

32. Soit ABC le triangle proposé, rectangle en B (*fig. 12*). Désignons par a, b, c, les côtés respectivement opposés aux angles A, B, C; alors b sera l'hypoténuse, a et c seront les deux côtés de l'angle droit. Si du point C comme centre, avec un rayon CO égal à celui des tables, on décrit l'arc OM, terminé par les côtés CB, CA, prolongés; si par les points O, M, on mène OT et MP perpendiculaires sur CO, on aura, d'après les définitions des lignes trigonométriques,

$$MP = \text{sin. } C;\; CP = \text{cos. } C;\; OT = \text{tang. } C.$$

Les proportions données par les triangles semblables CAB, CMP, CTO, résolvent les problèmes relatifs aux triangles rectangles. Voici le calcul, dans lequel r désigne toujours le rayon des tables :

33. I.er PROBLÈME (fig. 1.re, n.° 10). *Connaissant les deux côtés* a, c *de l'angle droit* B, *résoudre le triangle.* Il s'agit de trouver A, C, b. Les triangles semblables CBA, COT (*fig. 12*), donnent

$$CB : BA :: CO : OT, \text{ ou } a : c :: r : \text{tang. } C.$$

Cette proportion, qui détermine *tang.* C, fait connaître l'angle C, et par suite l'angle A; car A vaut $(90° - C)$. Pour calculer *tang.* C à l'aide des logarithmes, il faut, au log. du rayon r, ajouter le log. de c, et retrancher de la somme le log. de a; le reste exprime le log. de *tang.* C. Cherchant ce logarithme dans la colonne des log. des tangentes, l'angle C sera déterminé, et le côté b se déduira de la proportion

$$(\text{Fig. } 12) \ldots PM : MC :: BA : AC, \text{ ou sin. } C : r :: c : b.$$

34. II.e PROBLÈME (fig. 2, n.° 11). *Connaissant l'hypoténuse* b *et un côté* a *de l'angle droit, résoudre le triangle.* Les valeurs des inconnues C, c, se calculent par les proportions

$$(\text{Fig. } 12). \begin{cases} CA : CB :: CM : CP, \text{ ou } b : a :: r : \text{cos. } C. \\ CM : MP :: CA : AB, \text{ ou } r : \text{sin. } C :: b : c. \end{cases}$$

L'angle A se déduit de C, car A vaut $(90° - C)$.

35. III.e PROBLÈME (fig. 3, n.° 12). *Connaissant l'hypoténuse* b *et un angle aigu, résoudre le triangle.* Si l'on retranche de 90° l'angle aigu

qui est donné, le reste exprimera l'autre angle aigu. On connaîtra alors les angles aigus A, C, et l'hypoténuse b; les côtés inconnus c, a, se déduiront des proportions

$$\text{(Fig. 12).}\left\{\begin{array}{l} CM : MP :: CA : AB, \text{ ou } r : \sin. C :: b : c. \\ CM : CP :: CA : CB, \text{ ou } r : \cos. C :: b : a. \end{array}\right.$$

36. IV.ᵉ et V.ᵉ PROBLÈMES (fig. 4 et 5, n.ᵒˢ 13 et 14). *Connaissant un angle aigu et un côté de l'angle droit, résoudre le triangle.* Après avoir déterminé les angles aigus comme dans le n.° 35, le côté donné sera opposé à un angle connu. Soit c le côté connu; pour calculer les inconnues a et b, on dira,

$$\text{(Fig. 12).}\left\{\begin{array}{l} OT : OC :: BA : BC, \text{ ou tang. } C : r :: c : a. \\ PM : MC :: BA : AC, \text{ ou } \sin. C : r :: c : b. \end{array}\right.$$

37. Ces principes suffisent pour mettre en état de résoudre tous les cas des triangles rectangles; passons aux triangles obliquangles.

Démonstration des Formules qui servent à résoudre les Triangles obliquangles.

38. Il s'agit de résoudre ce problème général : *Connaissant les valeurs numériques de trois des cinq parties d'un triangle, calculer les parties inconnues.* Cela offre quatre problèmes particuliers, qui trouvent leur solution dans les trois formules que nous allons démontrer.

39. Soit ABC (*fig. 13*), le triangle proposé. Désignons ses angles par A, B, C, et les côtés respectivement opposés par a, b, c. Si avec un rayon r, égal à celui des tables, on décrit des points A, C, comme centres, les arcs MN, DE, et si des points B, M, D, on abaisse sur AC les perpendiculaires BP, MK, DH, ces deux dernières seront les sinus des angles A, C, et l'on aura

$$\text{(Fig. 13).}\left\{\begin{array}{l} MK : MA :: BP : BA, \text{ ou } \sin. A : r :: BP : c; \\ CD : DH :: CB : BP, \text{ ou } r : \sin. C :: a : BP. \end{array}\right.$$

Multipliant ces deux proportions terme à terme, et supprimant les facteurs

facteurs communs aux deux termes de chaque *rapport*, il vient.....

40. Sin. A : sin. C : : a : c...... *Premier principe.*

41. Dans le triangle ABC (*fig.* 14), soit $A > B$; d'où $a > b$. Prolongeons BC d'une quantité $CF = CA = b$, et menons FA. Le triangle ACF sera isocèle; et l'angle ACF, extérieur au triangle ACB, vaudra la somme des deux angles intérieurs opposés A et B ; de sorte que $ACF = (A + B)$. Menant CK perpendiculaire sur AF, l'angle FCA sera divisé en deux parties égales, et l'on aura

$$FCK = \tfrac{1}{2}(A + B).$$

Si par le point C on mène CH parallèle à BA, l'angle FCH sera égal à B ; mais *pour obtenir la plus petite de deux parties, il faut ôter leur demi-différence de leur demi-somme* ; or c'est HCK qu'il faut ôter de $FCK = \frac{1}{2}(A + B)$, pour obtenir le plus petit angle $FCH = B$; l'angle HCK exprime donc la demi-différence des angles A et B ; on a donc

$$HCK = \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Si du point K, milieu de AF, on mène KD parallèle à AB, le point D sera le milieu de BF ; or BF vaut $(BC + CF)$, ou $(BC + CA)$, ou $(a + b)$; on a donc

$$DB = DF = \tfrac{1}{2}(a + b) \text{ ; d'où } \ldots 2\,DF = (a + b).$$

Enfin, CD exprimant ce qu'il faut ôter de FD, ou $\frac{1}{2}(a + b)$, pour obtenir CF ou b, on aura

$$CD = \tfrac{1}{2}(a - b) \text{ ; d'où} \ldots 2\,DC = (a - b).$$

Cela posé, du point C comme centre, avec un rayon Cm égal à celui des tables, décrivons l'arc mn, et menons la tangente mT ; nous aurons

$$mT = \text{tang. } FCK = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(A + B),$$
$$ms = \text{tang. } HCK = \text{tang. } \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Les propriétés des parallèles donnent

$$KF : KH :: DF : DC :: mT : ms.$$

Donc, $2\,DF : 2\,DC :: mT : ms.$

Substituant les valeurs de $2\,DF$, $2\,DC$, mT, ms, il viendra

$$(a + b) : (a - b) :: \text{tang. } \tfrac{1}{2}(A + B) : \text{tang. } \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Si l'on observe que

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = \tfrac{1}{2}(180° - C) = (90° - \tfrac{1}{2}C).$$

On pourra remplacer tang. $\frac{1}{2}(A+B)$, par tang. $(90° - \frac{1}{2}C)$, ou par cot. $\frac{1}{2}C$; ce qui donnera

42... $(a+b) : (a-b) :: \cot.\frac{1}{2}C : \text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)$. *2.e Principe.*

43. La fig. 13 donne *

$$AM : AK :: AB : AP;$$

$$\text{ou } r : \cos. A :: c : AP = \frac{c \cos. A}{r}.$$

La ligne CP, égale à b moins AP, a donc pour valeur $\left(b - \frac{c \cos. A}{r}\right)$.
Les triangles BPA, BPC, rectangles en P, donnent, en égalant les deux valeurs de BP^2,

$$AB^2 - AP^2 = CB^2 - CP^2.$$

Substituant les valeurs des lignes AB, AP, CB, CP, il vient

$$c^2 - \left(\frac{c \cosin. A}{r}\right)^2 = a^2 - \left(b - \frac{c \cosin. A}{r}\right)^2.$$

On en déduit successivement

$$c^2 - \frac{c^2 \cosin.^2 A}{r^2} = a^2 - \left(b^2 - \frac{2bc \cos. A}{r} + \frac{c^2 \cos.^2 A}{r^2}\right) =$$

$$a^2 - b^2 + \frac{2bc \cos. A}{r} - \frac{c^2 \cos.^2 A}{r^2};$$

$$c^2 = a^2 - b^2 + \frac{2bc \cos. A}{r};$$

$$2bc \cos. A = r(c^2 + b^2 - a^2);$$

$$\cos. A = \frac{r(c^2 + b^2 - a^2)}{2bc}.$$

Nous allons changer cette dernière formule en une autre, qui sera plus propre à l'emploi des logarithmes. Soit décrit du point C comme centre (*fig. 15*), avec un rayon r égal à celui des tables, un arc OM, qui mesure l'angle $OCM = A$; ayant tiré la corde OM, menons dessus la perpendiculaire CQ; et du point M abaissons sur CO la perpendiculaire MP : il en résultera,

$$MP = \sin.\ OCM = \sin.\ A,$$

$$CP = \cos.\ OCM = \cos.\ A,$$

$$OP = CO - CP = r - \cos.\ A,$$

$$MQ = OQ = \sin.\tfrac{1}{2}A;\ OM = 2MQ = 2\sin.\tfrac{1}{2}A.$$

* Les personnes qui ne connaissent pas l'algèbre, peuvent passer le n.° 43.

Les triangles rectangles COQ, MOP, ayant un angle commun en O, sont semblables, et donnent

$$OC : OQ :: OM : OP;$$

ou $r : \sin. \frac{1}{2} A :: 2 \sin. \frac{1}{2} A : (r - \cos. A)$.

On en déduit

$$r^2 - r\cos. A = 2\sin.^2 \tfrac{1}{2} A;$$
$$r\cos. A = r^2 - 2\sin.^2 \tfrac{1}{2} A;$$
$$\cos. A = \frac{r^2 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} A}{r}.$$

Mais on a trouvé... $\cos. A = \frac{r(c^2 + b^2 - a^2)}{2bc}$; égalant ces valeurs de cos. A, et désignant par $2p$ la somme des trois côtés a, b, c du triangle ABC, il viendra

$$\frac{r(c^2 + b^2 - a^2)}{2bc} = \frac{r^2 - 2\sin.^2 \frac{1}{2} A}{r};$$
$$r^2(c^2 + b^2 - a^2) = 2bc(r^2 - 2\sin.^2 \tfrac{1}{2} A);$$
$$r^2(c^2 + b^2 - a^2) = 2bcr^2 - 4bc\sin.^2 \tfrac{1}{2} A;$$
$$4bc\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = r^2(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = r^2[a^2 - (b-c)^2]$$
$$= r^2(a+b-c)(a-b+c) =$$
$$r^2(a+b+c-2c)(a+b+c-2b) = r^2(2p-2c)(2p-2b)$$
$$= 4r^2(p-c)(p-b).$$

On en déduit

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{r^2(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Prenant les logarithmes des deux membres, on trouve

$$\log. \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \log. \left[\frac{r^2(p-b)(p-c)}{bc}\right];$$
$$2\, l.\sin. \tfrac{1}{2} A = l.(p-b) + l.(p-c) + l.r^2 - l.bc;$$
$$2\, l.\sin. \tfrac{1}{2} A = l.(p-b) + l.(p-c) + 2l.r - l.b - l.c;$$
$$2\, l.\sin. \tfrac{1}{2} A = l.(p-b) + l.(p-c) + (l.r - l.b) + (lr - lc);$$
$$l.\sin. \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{2}[l.(p-b) + l.(p-c) + (l.r - l.b) + (l.r - l.c)].$$

44. On désigne $(l.r - l.b)$ et $(l.r - l.c)$ par *compléments arithmétiques* de lb et de lc, et l'on écrit

$$(lr - lb) = C.^t\, lb; \ldots (lr - lc) = C.^t\, lc.$$

Il en résulte

$l.\sin. \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}[l.(p-b) + l.(p-c) + C.^t\, lb + C.^t\, lc]$... 3.e *Principe.*

45. Les principes des n.os 40, 42, 44, suffisent pour résoudre les triangles. Traduisons-les en langage ordinaire.

46. I.er Principe. La formule du n.° 40 dit que, *dans un triangle quelconque, les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.* Cette propriété donne le moyen de résoudre un triangle, lorsque parmi les données il entre un angle et un côté opposé.

47. II.e Principe. La formule du n.° 42 peut s'énoncer ainsi : *La somme des deux côtés d'un triangle est à leur différence, comme la cotangente de la moitié de l'angle compris par ces côtés est à la tangente de la demi-différence des angles opposés à ces côtés.* Cette proportion donne le moyen de résoudre un triangle, lorsqu'on connaît deux côtés et l'angle compris.

48. III.e Principe. La formule du n.° 44 détermine les angles, lorsqu'on connaît les trois côtés. Elle fournit cette règle générale : *Connaissant les trois côtés d'un triangle ; pour trouver un angle, calculez la demi-somme des trois côtés : de cette demi-somme retranchez successivement les deux côtés qui comprennent l'angle cherché ; vous aurez deux restes : à la somme des logarithmes de ces deux restes, ajoutez les complémens arithmétiques des logarithmes des deux côtés qui comprennent l'angle cherché ; la moitié de cette dernière somme exprimera le logarithme du sinus de la moitié de l'angle inconnu. Cherchez dans la colonne des logarithmes des sinus, à quel angle ce logarithme correspond, le double de cet angle sera l'angle demandé.*

Appliquons ces trois principes à la résolution des triangles obliquangles.

Résolution des Triangles obliquangles.

49. I.er et II.e Problèmes (fig. 6 et 7, n.os 15 et 16). *Connaissant deux angles et un côté, résoudre le triangle.* En retranchant de 180° la somme des angles connus, le reste exprimera le troisième angle ; on connaîtra donc les trois angles A, B, C, et un côté ; le côté connu sera alors opposé à un angle connu. Soit b le côté connu ; l'application du premier principe détermine les côtés inconnus a, c, au moyen des proportions

$$(\text{n.° } 40).\ \left\{\begin{array}{l}\sin. B : \sin. A :: b : a, \\ \sin. B : \sin. C :: b : c.\end{array}\right.$$

50. III.e Problème (fig. 8, n.° 17). *Connaissant deux côtés et l'angle*

opposé à l'un d'eux, résoudre le triangle. Soient a et c les côtés donnés, et A l'angle connu : les inconnues sont B, C, b. Le *premier principe* (n.° 46) suffit pour les déterminer. En effet, la proportion

$$(\text{n.° } 40),\ a : c :: \sin. A : \sin. C \ldots$$

détermine l'angle inconnu C; retranchant $(A + C)$ de $180°$, le reste exprime l'inconnu B; et alors b se déduit de la proportion

$$(\text{n.° } 40),\ \sin. C : \sin. B :: c : b \ldots$$

51. IV.ᵉ PROBLÈME (fig. 9, n.° 18). *Connaissant deux côtés et l'angle compris, résoudre le triangle.* Soient a, b, C, les parties connues; les inconnues seront A, B, c. Le *second principe* (n.° 42) donne, en supposant $a > b$, d'où $A > B$,

$$(a + b) : (a - b) :: \cot. \tfrac{1}{2} C : \text{tang.} \left(\frac{A - B}{2}\right).$$

Cette proportion détermine la demi-différence des angles A et B; leur demi-somme se déduit de l'angle connu C; car $(A + B)$ valant $(180° - C)$, la demi-somme $\left(\frac{A + B}{2}\right)$ vaudra $(90° - \frac{1}{2} C)$. *Ajoutant la demi-somme des angles* A, B, *à leur demi-différence, on aura le plus grand angle* A; *et retranchant la demi-somme de la demi-différence, le reste exprimera l'angle* B. Les angles A, B, C ainsi déterminés, on trouvera le côté inconnu c par l'une ou l'autre de ces proportions,

$$(\text{n.° } 40.) \begin{cases} \sin. A : \sin. C :: a : c, \\ \sin. B : \sin. C :: b : c. \end{cases}$$

Ces deux proportions doivent s'accorder à donner la même valeur de c.

52. V.ᵉ PROBLÈME (fig. 10, n.° 19). *Connaissant les trois côtés* a, b, c, *résoudre le triangle.* Il s'agit de calculer les angles A, B, C. L'application du *troisième principe* (n.° 48) déterminera l'angle A. On pourrait calculer les deux autres angles B, C, d'après la même règle; mais il est plus simple de les déduire des proportions

$$a : b :: \sin. A : \sin. B;\ a : c :: \sin. A : \sin. C.$$

On peut aussi, après avoir calculé l'angle A, en déduire B, C, au moyen du *second principe* (n.° 47). En effet, ce principe donne, en supposanr $b > c$, d'où $B > C$,

$$(b + c) : (b - c) :: \cot. \tfrac{1}{2} A : \text{tang.} \left(\frac{B - C}{2}\right).$$

Cette proportion détermine la demi-différence $\left(\frac{B-C}{2}\right)$. Mais la demi-somme $\left(\frac{B+C}{2}\right)$ est connue, car elle vaut $(90° - \frac{1}{2}A)$: on connaîtra donc la demi-somme et la demi-différence des angles B, C ; ce qui déterminera ces angles. *(Arithmétique, second volume, page 205, n.° 151.)*

Lorsqu'on n'a pas commis d'erreur de calcul, les trois procédés que nous venons d'indiquer doivent s'accorder à donner les mêmes valeurs de A, B, C, et la somme de ces angles doit valoir à-peu-près 180°.

53. Les principes que nous venons d'établir suffisent pour résoudre les différens cas des triangles rectangles et obliquangles. En analysant nos formules, on reconnaîtra l'accord parfait qui règne entre le calcul et les constructions. On verra que *toutes les fois que les* DONNÉES *s'accordent avec la nature du triangle, les formules déterminent les valeurs des parties inconnues ; et, au contraire, quand les parties connues établissent des conditions incompatibles avec l'existence du triangle, les formules l'indiquent en conduisant à des absurdités plus ou moins évidentes. L'emploi des logarithmes, qui abrége considérablement les calculs, n'offre jamais de difficultés ; car, lorsque le triangle est possible, il n'entre dans le calcul que des nombres positifs dont les logarithmes sont réels.*

§. III.

Calcul des Triangles.

54. Comme les tables de logarithmes à cinq décimales suffisent pour la plupart des opérations du *Cadastre*, nous en ferons usage dans nos exemples. Ces tables donnent directement les *minutes* ; ce qui suffit le plus souvent, car les instrumens ordinaires ne donnent pas les *secondes*. Si l'on veut plus d'exactitude, on calcule les *secondes*, ou les dixièmes et centièmes de *seconde*, par une proportion. Lorsque les opérations exigent une grande exactitude, on doit opérer avec les tables de *Callet*. Dans le supplément qui termine ce traité (*voyez* n.° 85), M. *Pommiès* donne le moyen de calculer les parties d'un triangle avec une très-grande exactitude ; mais, je le répète, cette exactitude devient inutile dans les opérations de détail.

Le calcul des triangles repose sur quelques principes que nous allons d'abord établir.

55. Dans nos tables, où le rayon r est égal à 1 00000 00000, ou à la dixième puissance de dix, le logarithme du rayon est dix : or le complément

arithmétique d'un logarithme s'obtient en retranchant ce logarithme du logarithme du rayon (n.° 44). *Le complément arithmétique d'un logarithme s'obtiendra donc en retranchant ce logarithme de dix unités ; ce qui revient à retrancher le premier chiffre significatif à droite de* 10, *et tous les suivans de* 9. Ainsi, le logarithme de 49 étant 1,69020, le complément arithmétique de ce logarithme est 8,30980. On écrit

$$C.^t\ l.\ 49 = 8{,}30980.$$

On trouvera de la même manière

$$C.^t\ l.\ 17 = 8{,}76955\ ;\ C.^t\ l.\ 9087 = 6{,}04158.$$

56. *Dans toute proportion où le rayon est un des* MOYENS, *il suffit d'ajouter le logarithme de l'autre* MOYEN *au complément arithmétique du logarithme du premier terme ; la somme exprime le logarithme du quatrième terme.* En effet, la proportion

$$a : r :: b : c,\ \text{donne}\ lc = lb + (lr - la).$$

Mais $(lr - la)$ est le complément arithmétique de *logarithme a* (n.° 44) ; on a donc

$$lc = lb + \text{Comp.}^t\ \text{arit.}\ la = lb + Comp.^t\ la.$$

On voit que le logarithme du quatrième terme c est égal au logarithme du *moyen* b, augmenté du complément arithmétique du logarithme du premier terme a.

57. *Dans toute proportion, si, après avoir ajouté à la somme des logarithmes des* MOYENS *le complément arithmétique du logarithme du premier terme, on diminue la somme de dix unités, le reste exprimera le logarithme du quatrième terme.* En voici la preuve ; la proportion

$$a : b :: c : d,$$

donne successivement

$$\begin{aligned} l.\ d &= (lb + lc) - la = (lb + lc) + (lr - la) - lr \\ &= (lb + lc) + \text{Comp.}^t\ \text{arit.}\ la - lr \\ &= (lb + lc) + \text{Comp.}^t\ \text{arit.}\ la - 10. \end{aligned}$$

Ainsi, pour calculer, au moyen des logarithmes, le quatrième terme 18 de la proportion

$$7 : 21 :: 6 : x,$$

on ajoutera aux logarithmes des moyens 21, 6, le complément arithmétique

du logarithme du premier terme 7; la somme 11,25527, diminuée de 10, donnera 1,25527 pour le logarithme du quatrième terme 18 ; et en effet ce logarithme correspond, dans la table, à 18.

Exemples relatifs aux Triangles rectangles.

58. Ier Problème (fig. 1.re). *On connaît les deux côtés* a, c *de l'angle droit* B.

Exemple. Soient *(fig. 16)*,

$$a = 170,\ c = 120.$$

Pour calculer l'angle C, on dira *(fig. 12)*,

$$a : c :: r : \text{tang. } C, \text{ ou } 170 : 120 :: r : \text{tang. } C.$$

Le rayon étant un des *moyens*, on ajoutera au logarithme de 120, qui est 2,07918, le complément arithmétique du logarithme de 170, qui est 7,76955 ; la somme 9,84873 exprimera le logarithme de *tang.* C. Si l'on cherche ce logarithme dans la colonne des logarithmes des tangentes, on trouvera, en négligeant les secondes, que l'angle C vaut 35° 13' ; retranchant cet angle de 90°, le reste 54° 47' exprimera l'angle A.

Pour calculer l'hypoténuse b, on dira *(fig. 12)*,

$$\text{sin. } C : r :: c : b, \text{ ou sin. } 35^\circ\ 13' : r :: 120 : b.$$

Ajoutant au logarithme de 120 le complément arithmétique du logarithme du sinus de 35° 13', le résultat 2,31825 sera le logarithme de b. Pour trouver, le plus exactement possible, à quel nombre appartient ce logarithme, on augmentera sa caractéristique d'une unité, ce qui donnera 3,31825 ; ce dernier logarithme tombe entre ceux des nombres 2080 et 2081 ; mais comme il approche plus du logarithme de 2081, nous prendrons 2081 ; séparant une décimale, à cause de l'unité ajoutée à la caractéristique, la valeur de l'hypoténuse b sera 208,1. Cette valeur est un peu trop forte, mais l'erreur est moindre qu'un dixième.

59. L'approximation précédente suffit assez souvent. Lorsqu'on veut déterminer les parties inconnues avec tout le degré d'exactitude dont nos petites tables sont susceptibles, on calcule ordinairement les secondes. mais, dans la pratique, il est plus avantageux de calculer les dixièmes et centièmes de minute ; cela évite une multiplication par 60, et le résultat

est

est plus exact ; car chaque dixième de minute valant 6 secondes, ou 6″, un centième de minute ne vaut que $\frac{6''}{10}$, ou 0″,6 ; de sorte qu'en s'arrêtant aux centièmes de minute, l'erreur est tout au plus d'un demi-centième de minute ou de 3 dixièmes de seconde ; tandis qu'en calculant les secondes, l'erreur peut être de 5 dixièmes de seconde. *Ces considérations doivent engager les Géomètres à calculer les dixièmes et centièmes de minute, au lieu des secondes.*

Pour calculer les côtés le plus exactement possible, on suppose que la *caractéristique* du logarithme du côté inconnu est 3 ; ce qui donne les quatre premiers chiffres à gauche du résultat. Si l'on veut un cinquième chiffre, on calcule à l'aide de la proportion, qui suppose que *les différences entre les nombres sont sensiblement proportionnelles aux différences entre les logarithmes ; cette proportion ne peut donner qu'un chiffre.*

60. Si dans l'exemple du n.° 58 on fait une proportion pour calculer les secondes de l'angle C, on trouvera que C vaut 35° 13′ 2″; en substituant cette valeur de C dans la proportion

$$\text{sin. } C : r :: c : b,$$

et faisant une proportion pour obtenir b avec une décimale de plus, on trouvera que b vaut 208,08 ; retranchant 35° 13′ 2″, de 90″, le reste 54° 46′ 58″ exprimera l'angle A.

Enfin, si l'on calcule les dixièmes et centièmes de minute de l'angle C, on trouvera que C vaut 35° 13′,04, c'est-à-dire, 35° 13′, plus quatre centièmes de minute.

La proportion qui a donné les dixièmes et centièmes de minute est

$$27 : 1' :: 1 :$$

Le quatrième terme vaut 0′,037, ou 0′,04, à moins d'un demi-centième de minute près ; chaque demi-centième de minute ne vaut que 3 dixièmes de seconde. Retranchant 35° 13′,04 de 90°, le reste 54° 46′, 96 exprimera l'angle A. Pour calculer l'hypoténuse b, on dira (*fig. 12*),

$$\text{sin. } C : r :: c : b, \text{ ou sin. } 35^\circ\, 13',04 : r :: 120 : b.$$

Le logarithme du sinus de 35° 13′,04 est 9,76094 *; son complément

* Pour obtenir le logarithme du sinus de 35° 13′,04, on prend dans les tables le logarithme du sinus de 35° 13′, qui est 9,76093. On voit dans la colonne des

arithmétique est 0,23906 ; ce complément ajouté au logarithme de 120, donne 2,31824 pour le logarithme de *b*. Cherchant à quel nombre appartient le logarithme 3,31824, on trouvera 2080,86, &c. ou en ne conservant que les cinq premiers chiffres, 2080,9 ; avançant la virgule d'un rang vers la gauche, à cause de l'unité ajoutée à la caractéristique du logarithme de *b*, le résultat 208,09 sera la valeur de l'hypoténuse *b*, à moins d'un centième d'unité près.

Cet exemple suffisant pour faire connaître comment on doit opérer lorsqu'on veut obtenir les dixièmes et centièmes de minute, nous nous bornerons à calculer les secondes : mais nous engageons les élèves à reprendre les mêmes exemples, en cherchant les dixièmes et centièmes de minute ; ils verront combien cela abrége. Ce procédé a d'ailleurs l'avantage de donner le résultat avec plus d'exactitude.

61. II.[e] PROBLÈME (n.° 34). *On connaît l'hypoténuse* b *et un côté* a *de l'angle droit.*

I.[er] Exemple (fig. 17). Soient

$$a = 270,\ b = 408.$$

Les inconnues sont *c*, *A*, *C*.

Pour calculer *C*, on dira *(fig. 12)*,

$$b : a :: r : \cos. C,\ \text{ou}\ 408 : 270 :: r : \cos. C.$$

---

différences, que la différence entre ce logarithme et celui du sinus de 35° 14′ est 18 cent-millièmes ; on dit alors,

Si, l'angle augmentant d'une minute, le logarithme du sinus de 35° 13′ augmente de 18 cent-millièmes, de combien, lorsque l'angle augmente de 0′,04, le même logarithme doit-il augmenter ?

Les trois premiers termes de la proportion sont donc

$$1' : 0{,}00018 :: 0',04 :$$

Le quatrième terme est 0,0000072, ou 0,00001, en ne conservant que cinq décimales ; ce quatrième terme exprime ce qu'il faut ajouter au logarithme du sinus de 35° 13′ pour obtenir le logarithme du sinus de 35° 13′,04 ; ajoutant donc 0,00001 à 9,76093, le résultat 9,76094 sera le logarithme du sinus de 35° 13′,04.

On opérera de la même manière toutes les fois que les angles contiendront des décimales de minute ; cela se réduira toujours à multiplier la différence des tables par les décimales de minute ; les unités du résultat exprimeront des cent-millièmes.

Ajoutant au logarithme de 270 le complément du logarithme de 408, la somme 9,82070 sera le logarithme de *cos.* C; cherchant ce logarithme dans la table, on trouvera, en négligeant les secondes, que C vaut 48° 34′; la valeur correspondante de A est 41° 26′; le côté c se déduit de la proportion

$$r : \sin. C :: b : c, \text{ ou } r : \sin. 48° 34' :: 408 : c.$$

Elle donne $c = 305,9$.

Si l'on calcule les secondes, on trouvera que C vaut 48° 33′ 56″; la valeur de A correspondante est 41° 26′ 4″.

Pour calculer le côté c, on dira,

$$r : \sin. C :: b : c, \text{ ou } r : \sin. 48° 33' 56'' :: 408 : c.$$

Cette proportion donne $c = 305,88$; or, en négligeant les secondes, on avait trouvé $c = 305,90$; l'erreur n'était donc que de 2 centièmes d'unité.

II.e Exemple (fig. 18). Soient

$$a = 200, \ b = 120.$$

Pour calculer l'angle C, on dira *(fig. 12)*,

$$b : a :: r : \cos. C, \text{ ou } 120 : 200 :: r : \cos. C.$$

Ajoutant au logarithme de 200 le complément arithmétique du logarithme de 120, la somme 10,22185 exprimera le logarithme du quatrième terme *cos.* C; le logarithme de *cos.* C étant plus grand que dix (logarithme du rayon), le cosinus est plus grand que le rayon; ce qui est absurde. Le triangle proposé ne peut donc pas exister; et en effet, si on cherche à le construire, on verra que l'hypoténuse b ne peut pas rencontrer le côté a; car b étant plus petit que $CB = a$, l'arc AK décrit du point C comme centre, avec le rayon $CA = b$, ne pourra pas rencontrer BH. En général, *quand l'hypoténuse est plus petite qu'un côté de l'angle droit, le triangle est impossible, et le calcul l'indique, en donnant un nombre plus grand que dix (logarithme du rayon), pour le logarithme d'un cosinus.*

62. Les autres cas des triangles rectangles n'offrant aucune difficulté, nous passerons aux triangles obliquangles. Le cas où l'on connaît la base et les deux angles à la base, étant celui qui se présente le plus souvent, nous l'analyserons avec soin.

Exemples relatifs aux Triangles obliquangles.

Ier et IIe PROBLÈMES. *On connaît deux angles et un côté* (n.° 49).

63. *Ier Exemple (fig. 19).* Soient

$$A = 36°, \ C = 82°, \ b = 130.$$

Les inconnues sont B, a, c. Si l'on retranche $(A + C)$ de 180°, le reste 62° exprimera l'angle B. Les côtés inconnus a, c, se déduisent des proportions

$$\sin. B : \sin. A :: b : a, \text{ ou } \sin. 62° : \sin. 36° :: 130 : a,$$
$$\sin. B : \sin. C :: b : c, \text{ ou } \sin. 62° : \sin. 82° :: 130 : c.$$

Pour calculer a, on ajoutera le logarithme de 130 au logarithme du sinus de 36° ; de la somme on retranchera le logarithme du sinus de 62° ; le reste sera le logarithme de a.

Si l'on veut faire usage des complémens arithmétiques, ce qui abrége un peu le calcul, on ajoutera à la somme des logarithmes des moyens, le complément arithmétique, à dix, du logarithme de l'extrème connu; la somme diminuée de dix, exprimera le logarithme du quatrième terme a de la proportion; cherchant à quel nombre ce logarithme appartient, on verra que la valeur de a, à moins d'un millième près, est 86,542.

La seconde proportion donne $c = 145{,}8$.

64. *Quand deux lignes se coupent sous un angle très-aigu, il est fort difficile de déterminer exactement leur point d'intersection ; la plus petite erreur sur les angles observés, donne une erreur très-forte sur la longueur des côtés.* Cela est évident. Nous allons en donner un exemple.

65. *IIe Exemple (fig. 20).* Soient

$$A = 89°, \ C = 88°, \ b = 84;$$

retranchant $(A + C)$ de 180°, il reste 3° pour l'angle B. Si l'on calcule le côté $BC = a$, dans la proportion

$$\sin. B : \sin. A :: b : a, \text{ ou } \sin. 3° : \sin. 89° :: 84 : BC,$$

on trouvera que BC vaut 1605, à moins d'une unité près.

Lorsqu'on mesure les angles avec un *graphomètre* dont le *nonius* ne donne

pas de divisions plus petites qu'une minute, en opérant avec tout le soin possible, on peut commettre une erreur d'une minute sur chaque angle. Voyons l'effet que cette erreur produit sur la longueur des côtés.

Si l'on commet une erreur d'une minute en plus dans la mesure des angles à la base A et C, on trouvera $B'AC = 89° 1'$, $B'CA = 88° 1'$, et par suite, $AB'C = 2° 58'$. La base b restant égale à 84, on calculera $B'C$ par la proportion

$$\sin. B' : \sin. B'AC :: b : B'C;$$
$$\text{ou } \sin. 2° 58' : \sin. 89° 1' :: 84 : B'C.$$

Elle donne $B'C = 1622$, à moins d'une unité près; mais on avait trouvé, en employant les valeurs exactes des angles, $BC = 1605$; conséquemment, lorsque l'angle B du sommet est de 3°, et la base b de 84, une erreur d'une minute sur la mesure de chaque angle à la base donne 17 unités d'erreur sur la longueur du côté $BC = a$; cette erreur est la cinquième partie de la base 84; le point B du terrain paraît en B', et au lieu du vrai triangle, qui est ABC, on trouve $B'CA$. Cet exemple fait voir combien *il est dangereux d'employer des angles très-aigus.*

66. *Le cas le plus favorable, lorsqu'on connaît la base et les deux angles à la base, est celui où la somme des angles à la base approche de 90°; l'angle du sommet approche alors de 90°, et une erreur d'une minute sur la mesure de chacun des angles à la base, influe peu sur les longueurs des côtés.*

67. Pour en donner un exemple, soient *(fig. 21)*

$$A = 47°, \ C = 44°, \ b = 500.$$

En calculant les côtés a, c, à moins d'un centième d'unité près, on trouvera

$$BC = 365{,}74\ldots; \ BA = 347{,}38.$$

Mesurant les angles A, C, avec le *graphomètre*, on commet sur chacun une erreur d'une minute en plus; il en résultera $B'AC = 47° 1'$, $B'CA = 44° 1'$; on en déduira $B = 88° 58'$; calculant les côtés a, c, avec ces nouveaux angles, on trouvera

$$B'C = 365{,}84; \ B'A = 347{,}49.$$

Les erreurs commises sur a et c ne sont donc que de 0,1 et de 0,11;

l'erreur 0,1 n'est que la cinq-millième partie de la base 500 ; tandis que dans l'exemple précédent, où l'angle du sommet était très-aigu, l'erreur était du cinquième de la base. Les géomètres doivent avoir égard aux observations précédentes, dans le choix des triangles. En général, *on ne doit jamais employer des angles très-aigus ou très-obtus.*

68. III.[e] Problème. *On connaît deux côtés, et l'angle opposé à l'un de ces côtés* (n.° 50).

I.[er] Exemple (fig. 22). Soient

$$c = 1599,\ a = 20,\ A = 70°.$$

Pour calculer l'angle C, on dira

$$a : c :: \sin. A : \sin. C, \text{ ou } 20 : 1599 :: \sin. 70° : \sin. C.$$

En effectuant le calcul, on trouve 11,87581 pour le logarithme de sin. C : mais *le logarithme d'un sinus ne peut jamais excéder le logarithme du rayon, qui est ici dix;* le triangle est donc impossible. On s'en convaincra en calculant la longueur de la perpendiculaire BP. Le triangle rectangle ABP, dans lequel on connaît l'hypoténuse $c = 1599$ et l'angle aigu $A = 70°$, donne

$$r : \sin. A :: c : BP, \text{ ou } r : \sin. 70° :: 1599 : BP.$$

On en déduit $BP = 1503$; mais $a = 20$; le côté a est donc moindre que la perpendiculaire BP; le triangle ne peut donc pas exister.

II.[e] Exemple (fig. 23). Soient

$$a = 3,\ c = 5,\ A = 36°52',2.$$

La valeur de l'angle C se déduit de la proportion

$$a : c :: \sin. A : \sin. C, \text{ ou } 3 : 5 :: \sin. 36°\,52',2 : \sin. C.$$

Elle donne 10 pour le logarithme de sin. C; ce qui indique que l'angle C est droit; car le sinus de 90° étant égal au rayon, *le logarithme du sinus de 90° est égal au logarithme du rayon, qui est dix.* L'angle B vaut donc $(90° - A)$, ou 53° 7', 8. La proportion qui détermine b devient alors, à cause de sin. $C = \sin. 90° = r$,

$$\sin. C : \sin. B :: c : b, \text{ ou } r : \sin. 53°\,7',8 :: 5 : b.$$

On en tire $b = 4$. Pour vérifier l'exactitude de ces calculs, on formera

les carrés des côtés *c*, *a*, *b*; on verra que le carré de l'hypoténuse 5 est égal à la somme des carrés des deux autres côtés 3 et 4; ce qui ne peut avoir lieu que dans un triangle rectangle. (*Voyez* mes Notes sur la *Géométrie de Bezout.*)

III.e Exemple (fig. 24). Soient

$$a = 150,\ c = 210,\ A = 18°.$$

Comme $c > a$, on a $C > A$, ou $C > 18°$; on peut donc prendre C moindre ou plus grand que 90°; ce qui donne deux solutions. Pour les découvrir, on dira

$$a : c :: \sin. A : \sin. C, \text{ ou } 150 : 210 :: \sin. 18° : \sin. C.$$

En négligeant les secondes, on trouve que C est de 25° 38' : mais le même sinus appartient aussi au supplément de 25° 38', qui est 154° 22'; l'angle C est donc susceptible de ces deux valeurs : chacune détermine un triangle dont nous allons calculer les parties inconnues.

I.re Solution. $a = 150$, $c = 210$, $A = 18°$, $C = 25° 38'$; d'où $ABC = 136° 22'$.

Ces parties appartiennent au triangle ABC, dans lequel l'angle $BCA = 25° 38'$.

Pour déterminer le côté $AC = b$, on dira

$$\sin. A : \sin. B :: a : b, \text{ ou } \sin. 18° : \sin. 136° 22' :: 150 : b.$$

Les angles plus grands que 90° ne se trouvant pas dans les tables, on cherchera le sinus du supplément de 136° 22', qui est 43° 38'; on trouvera $b = AC = 334{,}9$.

II.e Solution. $a = 150$, $c = 210$, $A = 18°$, $C = 154° 22'$; d'où $B = 7° 38'$.

Ces parties appartiennent au triangle ABC', dans lequel l'angle $BC'A = 154° 22'$.

Pour calculer le côté $AC' = b$, on dira

$$\sin. A : \sin. B :: a : b, \text{ ou } \sin. 18° : \sin. 7° 38' :: 150 : AC'.$$

Cette proportion donne... $b = AC = 64{,}48$.

Si l'on reprend les calculs précédens, en cherchant, par des proportions, les secondes pour les angles, et une décimale de plus pour les côtés, dans

le cas où le logarithme du terme inconnu ne se trouve pas exactement dans la table, on obtiendra

$$(Fig.\ 24.)\ldots\begin{cases}\text{Dans le triangle } BCA \begin{cases} BC = 150, \\ AB = 210, \\ A = 18°, \\ BCA = 25°38'2, \\ ABC = 136°21'58'', \\ AC = 334{,}95. \end{cases} \\ \text{Dans le triangle } BC'A \begin{cases} BC' = 150, \\ AB = 210, \\ A = 18°, \\ BC'A = 154°21'58'', \\ ABC' = 7°38'2'', \\ AC' = 64{,}483. \end{cases} \end{cases}$$

IV.e Exemple (fig. 25). Soient

$$a = 100,\ c = 100,\ A = 50°.$$

Les côtés a, c, étant égaux, les angles opposés A, C, sont aussi égaux; l'angle C est donc de 50°; il reste 80° pour l'angle B, et la proportion

sin. C : sin. B :: c : b, ou sin. 50° : sin. 80° :: 100 : b,

donne $b = 128{,}56 = AC$.

V.e Exemple (fig. 26). Soient

$$a = 75,\ c = 72,\ A = 53°.$$

La condition $c < a$ donne $C < A$; mais $A = 53°$; on ne peut donc admettre que la valeur de C, moindre que 90°; et par conséquent, les données actuelles ne peuvent appartenir qu'à un seul triangle; calculons ses parties.

Pour obtenir l'angle aigu C, on dira

a : c :: sin. A : sin. C, ou 75 : 72 :: sin. 53° : sin. C.

Il en résulte $C = 50°\ 3'$; retranchant $(A + C)$ de 180°, le reste 76° 57' exprime l'angle B.

Les proportions

sin. A : sin. B :: a : b, ou sin. 53° : sin. 76° 57' :: 75 : b,
sin. C : sin. B :: c : b, ou sin. 50° 3' : sin. 76° 57' :: 72 : b,

donnent toutes deux $b = 91{,}48$.

Si

Si l'on reprend les calculs précédens, en calculant les secondes, on trouvera

$$C = 50^\circ\,3'\,27'',\ B = 76^\circ\,56'\,33''.$$

Substituant ces valeurs de B et C dans les proportions qui déterminent b, elles s'accordent à donner $1,96133$ pour le logarithme de b; ce logarithme se trouve juste dans la table et répond à $91,48$; de sorte qu'il n'y a pas lieu à chercher une décimale de plus.

VI.e Exemple (fig. 27). Soient

$$A = 150^\circ,\ a = 200,\ c = 100.$$

La condition $c < a$ donne $C < A = 150^\circ$: ce qui n'entraîne aucune absurdité; car l'angle A étant obtus, l'angle C est nécessairement aigu. Opérant comme dans les exemples précédens, on trouvera

$$C = 14^\circ\,28'\,39'' = 14^\circ\,28',65;$$
$$B = 15^\circ\,31'\,21'' = 15^\circ\,31',35;$$
$$b = 107,05.$$

VII.e Exemple. Soient

$$A = 150^\circ, \ldots a = 80, \ldots\ c = 100.$$

Le côté c étant plus grand que le côté a, l'angle C devrait être plus grand que l'angle obtus A; ce qui est impossible. Les données actuelles ne peuvent donc appartenir à aucun triangle : il est donc inutile de chercher les valeurs des parties inconnues.

Sans ces réflexions, le calcul induirait en erreur; car on dirait

$$a : c :: \sin. A : \sin. C,\ \text{ou}\ 80 : 100 :: \sin. 150^\circ : \sin. C.$$

Le sinus de 150° étant le même que celui du supplément 30°, la proportion devient

$$80 : 100 :: \sin. 30^\circ : \sin. C.$$

On en déduit $9,79588$ pour le logarithme de sin. C; cherchant à quel angle ce logarithme appartient, on trouve $C = 38^\circ\,41'$; et cependant l'angle C ne peut pas exister.

Pour découvrir à quoi tient cette difficulté, il suffit d'observer que la valeur de C a été tirée de la proportion

$$80 : 100 :: \sin. 30^\circ : \sin. C,$$

dans laquelle on a mis, au lieu de A, son supplément 30°. On a donc

réellement opéré comme si l'angle A était aigu ; ce qui a fait disparaître l'impossibilité du problème.

En général, *avant de chercher à résoudre un triangle, il faut examiner s'il peut exister. Lorsqu'il ne peut pas exister, on ne doit point chercher à calculer ses parties inconnues.*

69. IVe PROBLÈME (fig. 28, n.° 51). *On connaît deux côtés et l'angle compris.* Soient

$$a = 310,\ b = 150,\ C = 54^\circ.$$

On en déduit

$$(a+b) = 460;\ (a-b) = 160,\ \tfrac{1}{2}C = 27^\circ;$$
$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ.$$

On connaît la demi-somme 63° des angles A, B; et leur demi-différence se déduit de la proportion

$$(a+b) : (a-b) :: \text{cotang.}\ \tfrac{1}{2}C : \text{tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

ou

$$460 : 160 :: \text{cotang.}\ 27^\circ : \text{tang.}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Le logarithme du quatrième terme est 9,83419 ; ce logarithme répond à 34° 19′ ; la demi-différence des angles A, B est donc 34° 19′ ; mais leur demi-somme est 63° ; ajoutant la demi-somme à la demi-différence, on trouve que A vaut 97° 19′ ; retranchant la demi-différence de la demi-somme, il reste 28° 41′ pour B.

Si l'on calcule c dans les deux proportions

sin. B : sin. C :: b : c, ou sin. 28° 41′ : sin. 54° :: 150 : c;
sin. A : sin. C :: a : c, ou sin. 97° 19′ : sin. 54° :: 310 : c;

on trouvera, dans la première, $c = 252{,}8$, et dans la seconde, $c = 252{,}9$. La valeur de c, à moins d'un dixième près, est donc 252,8 ou 252,9.

Si l'on veut plus d'exactitude, on calculera les secondes, et on trouvera que $\left(\frac{A-B}{2}\right) = 34^\circ\ 19'\ 9''$; on en déduira $A = 97^\circ\ 19'\ 9''$, et $B = 28^\circ\ 40'\ 51''$; substituant ces valeurs de A et B dans les proportions qui déterminent c, on trouvera dans les deux, $c = 252{,}85$.

70. V.e Problème. *On connaît les trois côtés* (n.° 52). Soient (*fig.* 29),

$$a = 130,\ b = 290,\ c = 240.$$

Le triangle est possible, car le plus grand côté 290 est moindre que la somme 370 des deux autres. Si l'on détermine l'angle $\frac{1}{2}A$, d'après le troisième principe (n.° 48), on trouvera, en négligeant les secondes, que $A = 26° 18'$. Voici le calcul :

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{660}{2} = 330,$$
$$p - b = 330 - 290 = 40,$$
$$p - c = 330 - 240 = 90;$$

log. $(p - b)$ = log. (40)	=	1,60206,
log. $(p + c)$ = log. (90)	=	1,95424,
comp.t arithm. de log. b	=	7,53760,
comp.t arithm. de log. c	=	7,61979.
Somme............	=	18,71369.
Demi-somme, ou log. sin. $\frac{1}{2}A$	=	9,35684.

Ce dernier logarithme appartient au sinus de 13° 9'; le double de cet angle donnera 26° 18' pour l'angle A. Si l'on calcule les deux autres angles d'après la même règle, on trouvera $B = 98° 50'$, et $C = 54° 52'$. La somme des trois angles A, B, C, ainsi déterminée, est exactement 180°.

On obtient rarement un résultat aussi exact. *Lorsqu'on trouve une erreur, on doit la répartir également sur les trois angles.*

71. L'application du troisième principe (n.° 48) conduisant à de longs calculs, on peut les abréger de la manière suivante. Après avoir calculé l'angle A comme ci-dessus, on retranchera $\frac{1}{2}A$ de 90°, le reste 76° 51' exprimera la demi-somme des angles inconnus B, C; et leur demi-différence se déduira de la proportion

$$(b + c) : (b - c) :: \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}A : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B - C),$$
$$\text{ou}\quad 53 : 5 :: \text{cot.}\ (13° 9') : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B - C).$$

Elle donne 21° 59', pour la demi-différence des angles B et C. On en déduit

$$B = 98° 50',\ C = 54° 52'.$$

Si l'on veut plus d'exactitude, on calculera d'abord $\frac{1}{2}A$ avec des secondes,

ce qui donnera $A = 26° 17' 28''$. Employant cette valeur de A dans les deux proportions

$$a : b :: \sin. A : \sin. B, \quad a : c :: \sin. A : \sin. C,$$

et déterminant les secondes de B et C, on trouvera

$$B = 98° 51', \; C = 54° 51' 26''.$$

La somme des angles A, B, C, ainsi déterminée, est $179° 59' 54''$. L'erreur en moins n'est que de $6''$ sur les trois angles, ou de $2''$ sur chaque angle; ajoutant donc $2''$ aux valeurs de A, B, C, on aura

$$A = 26° 17' 30', \; B = 98° 51' 2'', \; C = 54° 51' 28''.$$

Ces valeurs sont très-approchées; car, en effectuant les calculs avec les Tables de *Callet*, on trouve

$$A = 26° 17' 30'', \; B = 98° 51', \; C = 50° 51' 30''.$$

72. *Si l'un des côtés était plus grand que la somme des deux autres, le calcul indiquerait l'impossibilité du triangle, en conduisant à des absurdités. Le logarithme du sinus de la moitié de l'angle opposé au plus grand côté serait plus grand que dix, logarithme du rayon; et la recherche des deux autres angles conduirait à prendre le logarithme d'un nombre négatif, ce qui est impossible, puisque le logarithme d'un nombre négatif n'existe pas.*

Par exemple *(fig. 30)*, soient

$$b = 100, \; a = 20, \; c = 10.$$

L'application du troisième principe (n.° 48) donne 10,54627 pour le logarithme du sinus de $\frac{1}{2} B$. Le sinus de $\frac{1}{2} B$ serait donc plus grand que le rayon; ce qui est absurde. Et en effet, le triangle ne peut pas exister; car le côté 100 est plus grand que la somme 30 des deux autres côtés.

Si l'on supposait $b = 100$, $a = 60$, $c = 40$, comme le côté b serait alors égal à la somme des deux autres côtés a, c, ces deux derniers côtés se confondraient avec b; on aurait donc

$$B = 180°, \; A = 0, \; C = 0.$$

Il serait donc inutile d'appliquer le calcul à la recherche des angles A, B, C.

73. Les exemples précédens suffisent pour mettre en état de résoudre tous les problèmes relatifs aux triangles rectilignes.

74. Lorsqu'on connaît les trois côtés d'un triangle, on a quelquefois besoin de déterminer sa surface. On peut éviter la recherche de sa hauteur, au moyen de cette règle générale :

Pour évaluer la surface d'un triangle, connaissant ses trois côtés, il suffit, après avoir calculé la demi-somme des trois côtés, d'en retrancher successivement chaque côté ; à la somme des logarithmes des trois restes, on ajoute le logarithme de la demi-somme des trois côtés : la moitié du total exprime le logarithme de la surface du triangle proposé. Cherchant à quel nombre ce logarithme appartient, le résultat est la surface demandée.

Ainsi, par exemple, les trois côtés d'un triangle étant 100, 150, 200, leur demi-somme sera 225 ; si l'on en retranche successivement chacun des trois côtés, on aura les trois restes 125, 75, 25. A la somme des logarithmes de ces trois restes, ajoutant le logarithme de la demi-somme 225, il viendra 7,72209 ; la moitié 3,86104 de ce logarithme exprime le logarithme de la surface du triangle. Cherchant à quel nombre ce logarithme appartient, on trouvera 7262, à moins d'une unité près, pour la surface du triangle proposé. Si les côtés exprimaient des mètres, la surface serait de 7262 mètres carrés, qui valent 72 ares 62 centiares (Arithmétique).

Si l'un des côtés était plus grand que la somme des deux autres, le triangle n'existerait pas ; il serait donc inutile de chercher sa surface. La règle conduirait alors à une absurdité ; car on devrait prendre le logarithme d'un nombre négatif. Si l'un des côtés était égal à la somme des deux autres, la surface du triangle serait zéro. On trouvera la démonstration de cette règle, *chap. IV.*

§. IV.

Calcul des Lignes trigonométriques.

75. Le calcul des lignes trigonométriques repose sur quelques principes que nous allons d'abord établir. Le rayon des tables sera toujours désigné par r.

76. I.er Principe. *Si* a *et* b *représentent deux arcs ou deux angles quelconques, on aura, en supposant* a > b,

$$\sin.(a+b) = \frac{\sin.a\cos.b + \cos.a\sin.b}{r},$$

$$\sin.(a-b) = \frac{\sin.a\cos.b - \cos.a\sin.b}{r},$$

$$\cos.(a+b) = \frac{\cos.a\cos.b - \sin.a\sin.b}{r},$$

$$\cos.(a-b) = \frac{\cos.a\cos.b + \sin.a\sin.b}{r}.$$

La démonstration de ces quatre formules n'offre aucune difficulté. En effet, si du point C comme centre (*fig.* 31), avec un rayon $CA = r$, on décrit un arc indéfini AT; si l'on prend ensuite...

$$AB = a,\ BD = BE = b,$$

le rayon CB, qui divise l'arc EBD en deux parties égales, sera perpendiculaire sur le milieu I de la corde ED. Des points E, B, D, I, abaissons sur AC les perpendiculaires EN, BP, DH, IQ, et des points EI menons EK, IM parallèles à AC. D'après cette construction, on aura

$$AD = (AB + BD) = (a+b),$$
$$AE = AB - BE = (a-b),$$
$$DH = \sin.AD = \sin.(a+b),$$
$$CH = \cos.AD = \cos.(a+b),$$
$$EN = \sin.AE = \sin.(a-b),$$
$$CN = \cos.AE = \cos.(a-b),$$
$$BP = \sin.AB = \sin.a,$$
$$CP = \cos.AB = \cos.a,$$
$$DI = \sin.BD = \sin.b,$$
$$CI = \cos.BD = \cos.b.$$

Cela posé, les lignes IM, IG, respectivement parallèles aux côtés KE, KD du triangle DEK, divisent ces côtés proportionnellement; mais le point I est le milieu de ED; les points M et G sont donc aussi les milieux des côtés KD, KE. Conséquemment...

$$\sin.(a+b) = DH = HM + MD = IQ + DM,$$
$$\sin.(a-b) = EN = GQ = IQ - IG = IQ - MK = IQ - DM,$$
$$\cos.(a+b) = CH = CQ - QH = CQ - IM,$$
$$\cos.(a-b) = CN = CQ + QN = CQ + GE = CQ + GK = CQ + IM.$$

Les valeurs du sinus et du cosinus de la somme et de la différence des angles a et b ne dépendent donc que des quatre lignes IQ, DM, CQ, IM. Calculons ces lignes.

Les triangles semblables CIQ; CBP donnent...

$$CB : BP :: CI, IQ, \text{ ou } r : \sin. a :: \cos. b : IQ = \frac{\sin. a . \cos. b}{r},$$

$$CB : CP :: CI : CQ, \text{ ou } r : \cos. a :: \cos. b : CQ = \frac{\cos. a \cos. b}{r}.$$

Les triangles DIM, BCP, ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, sont semblables. On en déduit

$$CB : BP :: DI : IM, \text{ ou } r : \sin. a :: \sin. b : IM = \frac{\sin. a \sin. b}{r},$$

$$CB : CP :: DI : DM, \text{ ou } r : \cos. a :: \sin. b : DM = \frac{\cos. a \sin. b}{r}.$$

La substitution de ces valeurs de IQ, CQ, IM, DM dans $\sin. (a + b)$, $\sin. (a - b)$, $\cos. (a + b)$, $\cos. (a - b)$, donne

$$\sin. (a + b) = \frac{\sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b}{r},$$

$$\sin. (a - b) = \frac{\sin. a \cos. b - \cos. a \sin. b}{r},$$

$$\cos. (a + b) = \frac{\cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b}{r},$$

$$\cos. (a - b) = \frac{\cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b}{r}.$$

Ces formules donnent le moyen de calculer le sinus ou le cosinus de la somme ou de la différence de deux angles dont on connaît les sinus et les cosinus. Si l'on suppose $a = b$ dans les valeurs de $\sin. (a + b)$ et $\cos. (a + b)$, on trouvera...

$$\sin. (2a) = \frac{2 \sin. a . \cos. a}{r} = \frac{2 \sin. a \sqrt{(r^2 - \sin.^2 a)}}{r},$$

$$r \cos. 2a = \cos.^2 a - \sin.^2 a = \cos.^2 a - (r^2 - \cos.^2 a) = 2 \cos.^2 a - r^2.$$

On en déduit

$$\cos. a = \sqrt{\left(\frac{r^2 + r \cos. 2a}{2}\right)}.$$

77. IIe Principe. *Toutes les lignes trigonométriques ne dépendent que des sinus du demi-premier quadrans.*

En effet, si l'on désigne par a un arc ou un angle quelconque, on aura (n.° 31)...

$$\cos. a = \sqrt{(r^2 - \sin.^2 a)},$$

$$\text{tang. } a = \frac{r \sin. a}{\cos. a} = \frac{r \sin. a}{\sqrt{(r^2 - \sin.^2 a)}},$$

$$\cot. a = \frac{r \cos. a}{\sin. a} = \frac{r(\sqrt{r^2 - \sin.^2 a})}{\sin. a},$$

$$\text{séc. } a = \frac{r^2}{\cos. a} = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 - \sin.^2 a)}},$$

$$\text{coséc. } a = \frac{r^2}{\sin. a}.$$

Ces formules démontrent que *les lignes trigonométriques ne dépendent que des sinus, et du rayon* que l'on suppose toujours connu. La question est donc réduite à prouver que le sinus d'un arc quelconque ne dépend que du sinus d'un arc du demi-premier quadrans. En voici la démonstration.

Si l'on désigne par b un arc quelconque du demi-premier quadrans, c'est-à-dire, de la moitié du quart de cercle ABA', compté à partir d'un point A de la circonférence choisi à volonté pour l'origine des arcs *(fig. 31)*, on aura...

$$b < 45°.$$

Alors $(90° - b)$ exprimera un arc du premier quadrans, plus grand que $45°$; un arc quelconque du second quadrans sera exprimé par $(90° + b)$, ou par $(180° - b)$; un arc du troisième quadrans aura pour valeur $(180° + b)$ ou $(270° - b)$; et $(270° + b)$ ou $(360° - b)$ exprimera un arc quelconque du quatrième quadrans. Enfin, si α exprime un arc quelconque, moindre que $360°$, tout arc plus grand que la circonférence sera représenté par $(n.360° + \alpha)$. Les formules du n.° 76 donneront...

I.^r quadrans. $\begin{cases} \sin. b, \\ r \sin.(90° - b) = \sin. 90° \cos. b - \cos. 90° \sin. b = r \cos. b = r\sqrt{(r^2 - \sin.^2 b)}. \end{cases}$

II.° .... $\begin{cases} r \sin.(90° + b) = \sin. 90° \cos. b + \cos. 90° \sin. b = r \cos. b = r\sqrt{(r^2 - \sin.^2 b)}, \\ r \sin.(180° - b) = \sin. 180° \cos. b - \cos. 180° \sin. b = r \sin. b. \end{cases}$

III.° .... $\begin{cases} r \sin.(180° + b) = \sin. 180° \cos. b + \cos. 180° \sin. b = -r \sin. b, \\ r \sin.(270° - b) = \sin. 270° \cos. b - \cos. 270° \sin. b = -r \cos. b = -r\sqrt{(r^2 - \sin.^2 b)}. \end{cases}$

IV.° .... $\begin{cases} r \sin.(270° + b) = \sin. 270° \cos. b + \cos. 270° \sin. b = -r \cos. b = -r\sqrt{(r^2 - \sin.^2 b)}, \\ r \sin.(360° - b) = \sin. 360° \cos. b - \cos. 360° \sin. b = -r \sin. b. \end{cases}$

$$r \sin.(n.360° + \alpha) = \sin.(n.360°) \cos. \alpha + \cos.(n.360°) \sin. \alpha = r \sin. \alpha.$$

Cette dernière formule démontre que les sinus des arcs plus grands que la circonférence ne dépendent que des sinus des arcs moindres que la circonférence,

circonférence ; et comme, d'après les autres formules, les sinus des arcs moindres que la circonférence ne dépendent que des sinus du demi-premier quadrans, il en résulte enfin que *le sinus d'un arc quelconque ne dépend que du sinus d'un arc du demi-premier quadrans.* Or on a démontré que les lignes trigonométriques ne dépendent que des sinus ; toutes les lignes trigonométriques ne dépendent donc que des sinus du demi-premier quadrans. Il suffira donc de calculer les sinus des arcs du demi-premier quadrans, depuis o jusqu'à 45°. Le calcul de ces sinus repose sur les principes suivans.

78. III.ᵉ PRINCIPE. *Un arc moindre que 90° est toujours plus grand que son sinus, et plus petit que sa tangente ; de sorte que la longueur d'un arc du premier quadrans est toujours comprise entre la longueur du sinus et celle de la tangente.* En effet, soit *(fig. 11)* C le centre d'un arc ApB moindre que 90° ; menons aux extrémités A et B de cet arc les lignes AT, BK, respectivement perpendiculaires aux rayons CA, CB ; les droites AT, BK, ne pourront jamais couper l'arc AB. Tirons la corde AB, et abaissons BP perpendiculaire sur AC ; prolongeons AK et CB jusqu'à leur rencontre en T ; alors BP et AT exprimeront le sinus et la tangente de l'arc ApB, que nous désignerons par p. Il s'agit de démontrer les inégalités suivantes

$$ApB > BP,$$
$$ApB < AT.$$

1.° La ligne droite étant la plus courte distance entre deux points, l'arc ApB est plus grand que sa corde AB ; mais la ligne BP, perpendiculaire sur CA, est plus courte que l'oblique BA. *L'arc* ApB *est donc plus grand que son sinus* BP.

2.° L'arc convexe ApB est plus petit que la ligne brisée AKB qui l'enveloppe (*voyez* mes Notes sur la Géométrie de Bézout) : or la perpendiculaire KB sur CT est plus courte que l'oblique KT ; on a donc...

$$KB < KT.$$

Ajoutant AK à chaque membre de cette inégalité, il viendra

$$(AK + KB) < (AK + KT), \text{ ou } (AK + KB) < AT.$$

Mais... $ApB < AK + KB$.

Donc, à plus forte raison, *l'arc* ApB *est plus petit que sa tangente* AT.

79. IV.ᵉ PRINCIPE. *La tangente diminue plus rapidement que le sinus.* En effet, on voit dans la figure que lorsqu'un angle aigu diminue, son sinus et sa tangente diminuent et son cosinus augmente. Mais l'équation...

$$\text{tang. } a = \frac{r \text{ sin. } a}{\text{cos. } a}$$

donne

$$r \text{ sin. } a = \text{cos. } a \text{ tang. } a.$$

Conséquemment, lorsque sin. a diminue, le produit cos. a tang. a doit diminuer; mais cos. a augmente : il faut donc que tang. a diminue plus rapidement que sin. a.

En voici une démonstration plus rigoureuse. Lorsque l'angle aigu a diminue d'une quantité b, moindre que a, sin. a diminue d'une quantité s moindre que sin. a ; tang. a diminue d'une quantité t moindre que tang. a, cos. a augmente de c. On a donc

$$\begin{aligned} \text{sin. } (a - b) &= (\text{sin. } a) - s, \\ \text{tang. } (a - b) &= (\text{tang. } a) - t, \\ \text{cos. } (a - b) &= (\text{cos. } a) + c. \end{aligned}$$

Mais l'équation

$$r \text{ sin. } a = \text{cos. } a \text{ tang. } a$$

dit que *le produit du rayon par le sinus est toujours égal au produit du cosinus par la tangente.* On a donc...

$$r \text{ sin. } (a - b) = \text{cos. } (a - b) \text{ tang. } (a - b).$$

Substituant les valeurs de sin. $(a - b)$, cos. $(a - b)$, tang. $(a - b)$, il viendra

$$r [(\text{sin. } a) - s] = [(\text{cos. } a) + c] \times [(\text{tang. } a) - t].$$

Effectuant les multiplications indiquées, et remarquant que r sin. $a =$ cos. a. tang. a, on parviendra à l'équation...

$$(t \text{ cos. } a) - rs = c [(\text{tang. } a) - t].$$

Mais $[(\text{tang. } a) - t]$ est une quantité positive; l'expression $[(t \text{ cos. } a) - rs]$ est donc essentiellement positive; on a donc...

$$rs < t.\text{cos. } a.$$

Mais... cos. $a < r$.

Multipliant ces. deux inégalités, il vient...

$$s \times r \text{ cos. } a < t \times r \text{ cos. } a; \text{ d'où } s < t.$$

Or s exprime la diminution du sinus, et t la diminution de la tangente. *La tangente diminue donc plus rapidement que le sinus.*

80. Les principes que nous venons d'établir, fournissent deux procédés pour calculer les lignes trigonométriques : le premier suppose la connaissance du rapport de la circonférence au diamètre (*voyez* ma Géométrie) ; le second procédé repose sur cette propriété, que *le côté de l'hexagone inscrit, ou la corde de 60°, est égal au rayon du cercle circonscrit.*

Les longueurs des lignes trigonométriques étant proportionnelles aux longueurs des rayons, nous calculerons ces lignes en supposant le rayon égal à l'unité. La multiplication de ces lignes par le rayon r des tables donnera les lignes trigonométriques correspondantes au rayon r : de sorte qu'*ayant calculé les logarithmes des lignes trigonométriques pour le rayon* 1, *il suffira d'ajouter log.* r *ou 10 à ces logarithmes, pour former les logarithmes des lignes trigonométriques correspondantes au rayon* r = 100000 00000.

81. Ier PROCÉDÉ. Nous remarquerons d'abord que la connaissance du rapport de la circonférence au diamètre donne le moyen de calculer la longueur d'un arc quelconque, lorsqu'on connaît le nombre des degrés, minutes et secondes qui le composent. Mais quand un arc est très-petit, il se confond sensiblement avec son sinus; de sorte que si l'on prend la longueur de cet arc pour celle de son sinus, l'erreur commise sera très-petite. Connaissant les longueurs approchées des sinus des arcs très-petits, on s'élevera aux sinus des arcs plus grands, au moyen des formules du n.° 76. Il sera facile de mesurer les erreurs : car le sinus de 30°, moitié de la corde de 60°, devra être égal à la moitié du rayon ; et la tangente de 45° devra être égale au rayon, que nous supposons égal à l'unité. Exécutons ces calculs.

Le rapport approché du diamètre à la circonférence est, suivant *Archimède*, de 7 à 22, et, suivant *Métius*, de 113 à 355. Le second rapport est le plus exact ; mais le calcul des lignes trigonométriques exige une plus grande approximation. On démontre en géométrie, que, dans un cercle dont le rayon est l'unité, la longueur de la demi-circonférence ou de l'arc de 180° est...

3,14159 26535 89793 2 &c.

On en déduit......

$$1^\circ = 60' = 0,01745\ 32925\ 19943\ 2956\ \&c.,$$
$$1' = 60'' = 0,00029\ 08882\ 08665\ 721593\ \&c.,$$
$$1'' = \quad 0,00000\ 48481\ 36811\ 09535988\ \&c.$$

Pour obtenir les longueurs approchées des lignes trigonométriques correspondantes au rayon, à moins d'une unité décimale du dixième ordre près, il suffit de partir de l'arc d'une seconde, en supposant cet arc égal à son sinus. Voici le calcul.

Soit...... $\sin.\ 1'' = 0,\ 00000\ 48481\ 36811\ 09535\ 988\ \&c.$, cette valeur de sin. 1″ est un peu trop forte; mais l'erreur est moindre qu'une unité décimale du quinzième ordre. En effet, si partant de cette valeur de sin. 1″, qui est un peu trop forte, on en déduit la valeur de tang. 1″, par la formule

$$\text{tang. } 1'' = \frac{\sin.\ 1''}{\sqrt{(1 - \sin.^2\ 1'')}} \ldots (\textit{voyez n.° } 77)\ ^*,$$

on trouvera la valeur trop forte...

$$\text{tang. } 1'' = 0,00000\ 48481\ 36811\ 15\ \&c.$$

On a donc

$$\sin.\ 1'' < 0,00000\ 48481\ 36811\ 09\ \&c.,$$
$$\text{arc } 1'' = 0,00000\ 48481\ 36811\ 09\ \&c.,$$
$$\text{tang. } 1'' < 0,00000\ 48481\ 36811\ 15\ \&c.$$

Les quinze premières décimales de ces trois expressions étant les mêmes, si l'on prend

$$0,00000\ 48481\ 36811$$

pour la longueur de sin. 1″, l'erreur sera moindre qu'une unité du quinzième ordre décimal. En effet,

---

* Voici le calcul :

$\sin.\ 1'' = 0,00000\ 48481\ 36811\ 09535\ 988$

$(\sin.\ 1'')^2 = 0,00000\ 00000\ 23504\ 43053\ 90978\ 85210\ 05017\ 88667$

$\cos.^2\ 1'' = 1 - \sin.^2 1'' = 0,99999\ 99999\ 76495\ 56946\ 09021\ 14789\ 94982\ 11333.$

Extrayant la racine carrée de cette valeur de cos.² 1″, par la méthode abrégée indiquée dans mon Arithmetique, on trouvera

$$\cos.\ 1'' = 0,99999\ 99999\ 88247\ 78.$$

Divisant la valeur de sin. 1″ par celle de cos. 1″, le quotient exprimera la tangente de 1″. Ce calcul effectué donne...

$$\text{tang. } 1'' = 0,00000\ 48481\ 36811\ 15\ \&c.$$

1.° Cette valeur n'est pas trop faible d'une unité du quinzième ordre décimal ; car en l'augmentant d'une unité de cet ordre, on aurait

$$\sin. 1'' = 0,00000\ 48481\ 36812.$$

Cette valeur de sin. 1″ serait donc plus grande que l'arc de 1″ ; ce qui est impossible (n.° 78).

2.° Cette valeur n'est pas trop forte d'une unité du quinzième ordre décimal : car, si l'on devait la diminuer d'une moitié de cet ordre, la tangente de 1″, qui diminue plus rapidement que sin. 1″ (n.° 79), deviendrait plus petite que l'arc de 1″; ce qui est absurde (n.° 78).

L'erreur commise en prenant

$$0,00000\ 48481\ 36812$$

pour la longueur du sinus de 1″, est donc moindre qu'une unité du quinzième ordre décimal ou que $\frac{1}{100000\ 00000\ 00000}$.

Les quinze premières décimales de l'arc d'une seconde expriment le sinus de 1″, à moins d'une unité du quinzième ordre décimal. On est certain que les quinze premières décimales de tous les arcs depuis 0 jusqu'à 1″ exprimeront les sinus de ces arcs, à moins d'une unité du quinzième ordre décimal près ; de sorte que l'erreur en plus ou en moins sera moindre qu'une unité décimale du quinzième ordre.

Les sinus des arcs plus grands qu'une seconde, se calculeront au moyen des formules

$$(\text{n.}^\circ\ 31)\ldots\ \cos. a = \sqrt{(1-\sin.^2 a)}.$$

$$(\text{n.}^\circ\ 76)\ldots\begin{cases}\sin. 2a = 2\sin. a\cos. a,\\ \sin.(a\pm b) = \sin. a\cos. b \pm \cos. a\sin. b,\\ \cos.(a\pm b) = \cos. a\cos. b \mp \sin. a\sin. b.\end{cases}$$

Il suffira de regarder l'arc dont on cherche le sinus, comme la somme ou la différence de deux arcs dont les sinus et les cosinus sont connus.

En partant de sin. 1″, on trouvera, au moyen des deux premières formules,

$$\cos. 1'' = \sqrt{[(1-\sin.^2 1'')]} = 0,99999\ 99999\ 88247\ \&c.,$$
$$\sin. 2'' = 2\sin. 1''\cos. 1'' = 0,00000\ 96962\ 73624\ \&c.,$$
$$\cos. 2'' = \cos.^2 1'' - \sin.^2 1'' = 0,99999\ 99999\ 52990\ \&c.,$$
$$\sin. 4'' = 2\sin. 2''\cos. 2'' = 0,00001\ 93925\ 47241\ \&c.,$$
$$\cos. 4'' = \cos.^2 2'' - \sin.^2 2'' = 0,99999\ 99998\ 11862\ \&c.$$

On calculera ainsi successivement les sinus et les cosinus des arcs

$1'', 2'', 4''. 8'', 16'', 32'', 1'.4'', 2'.8'', 4'.16'', 8'.32'', 17'.4'', 34'.8'', 1^\circ.8'.16''.$

Combinant ces arcs, à l'aide des formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme et de la différence de deux arss dont les sinus et les cosinus sont connus, on obtiendra les valeurs approchées des sinus et des cosinus de tous les arcs depuis $1''$ jusqu'à 45°. Les valeurs approchées du sinus de 30° et de la tangente de 45° différeront des valeurs exactes 0, 5 et 1, d'une quantité moindre qu'une unité décimale du dixième ordre décimal ; de sorte qu'*on aura les valeurs des lignes trigonométriques, à moins de la* 10000000000.[ième] *partie du rayon près.* Voici quelques résultats :

sin. 1° $= 0,01745$ &c.,	cos. 1° $= 0,99985$ &c.,
sin. 8° $= 0,13917$ &c.,	cos. 8° $= 0,99027$ &c.,
sin. $16^\circ.41' = 0,28708$ &c.,	cos. $16^\circ.41' = 0,95791$ &c.,
sin. 40° $= 0,64279$ &c.,	cos. 40° $= 0,76604$ &c.

82. IIe Procédé *. La corde de 60° étant égale au rayon que nous supposons l'unité, le sinus de 30° qui en est la moitié, vaut $\frac{1}{2}$ ou 0,5. On aura donc

$$\cos. 30^\circ = \sqrt{(1 - \sin.^2 30^\circ)} = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4})} = \sqrt{(\tfrac{3}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \ldots$$
$$\ldots = 0,86603, \text{ \&c.}$$

Connaissant le cosinus de 30°, la formule générale

$$\cos. a = \sqrt{\frac{1 + \cos. 2a}{2}} \ldots\ldots (\textit{voyez} \text{ n.}^\circ 76)$$

donnera successivement les cosinus des angles...

$$15^\circ, \frac{15^\circ}{2}, \frac{15^\circ}{4}, \frac{15^\circ}{8}, \frac{15^\circ}{16}, \frac{15^\circ}{32}, \frac{15^\circ}{64}, \frac{15^\circ}{128} \text{ \&c.}$$

On en déduira les sinus des mêmes angles. Lorsqu'on sera ainsi parvenu au sinus d'un arc moindre qu'une seconde, on pourra supposer que l'arc est sensiblement égal à son sinus. Connaissant alors la valeur approchée d'un arc très-petit, on en déduira facilement la longueur de la circonférence. On trouvera ainsi que le rayon étant l'unité, la longueur de la demi-circonférence est

$$3,14159\ 26535\ 89793 \text{ \&c.}$$

* Ce procédé étant indiqué dans tous les ouvrages, nous nous bornerons à en donner une idée.

Connaissant les sinus et les cosinus des arcs très-petits, on en déduira les sinus et les cosinus des arcs plus grands, au moyen des formules des n.os 76 et 77.

83. Les longueurs des lignes trigonométriques étant déterminées, si l'on calcule les logarithmes des nombres qui expriment ces longueurs, on obtiendra les logarithmes des lignes trigonométriques. Par exemple, le rayon étant l'unité, la longueur du sinus de 40° est 0,64279 &c. Conséquemment le logarithme du sinus de 40° s'obtiendra en cherchant le logarithme du nombre décimal 0,64279 &c.; ce logarithme est — 0,19193. De sorte que...

le rayon étant 1 . . . . . . log. (sin. 40°) = — 0, 19193.

Ce logarithme négatif correspond au rayon 1; mais dans nos tables, où le rayon $r = 100000\ 00000$, le logarithme du rayon est 10. Le logarithme tabulaire du sinus de 40° s'obtiendra donc en ajoutant 10 à — 0,19193; ce qui donnera...

le rayon étant r... log. (sin. 40°) = 10 — 0,19193 = 9,80807.

Et en effet, on trouve dans la table que le logarithme du sinus de 40° est 9, 80807.

Les logarithmes des lignes trigonométriques correspondantes à des arcs quelconques se calculent de la même manière.

§. V.

Problème.

84. *Connaissant les positions relatives de trois points* A, B, C *(fig. 32) du terrain, et ces points étant rapportés en* a, b, c *(fig. 33) sur la carte, construire sur cette carte, au moyen d'une seule station faite en* D, *le point de station* D. *Du point* D, *on aperçoit les trois points* A, B, C.

Solution graphique.

Les points A, B, C du terrain étant rapportés en a, b, c sur la carte, il s'agit de construire sur la carte le point d, homologue au point D du terrain.

Le graphomètre étant placé en D, on mesurera les angles ADB, BDC, réduits à l'horizon. Le point cherché d étant l'homologue du point D, les angles adb, bdc, doivent être respectivement égaux aux angles ADB, BDC, mesurés sur le terrain. Conséquemment, si l'on construit sur les lignes

connues ab, bc, du côté du point cherché d, des segmens $adnb$, $bdn'c$, capables des angles donnés $adb = ADB$, $bdc = BDC$, l'intersection d de ces deux arcs déterminera le point de station d en D.

Pour construire les segmens $adnb$, $bdn'c$, on élevera sur les milieux m, m' des côtés ab, bc, les perpendiculaires indéfinies mk, $m'k'$. Pour les points a, c, on menera les droites ar, cS, formant avec ab et bc des angles rab, scb respectivement égaux aux angles observés ADB, BDC. Menant ah et ce, perpendiculaires sur ar et cs, les points d'intersection O, O' de ces lignes avec mk et $m'k'$, détermineront les centres des segmens $adnb$, $bdn'c$; et conséquemment les arcs anb', $bn'c$, décrits des points O, O', comme centres, avec le rayon oa, $o'c$, seront les segmens demandés.

Il est facile de prouver que l'intersection d des arcs anb, $bn'c$, ainsi construits, détennine la position du point D sur la carte. En effet, l'angle $rab = ADB$, formé par une tangente ar et une corde ab, a pour mesure la moitié de l'arc apb compris entre ses côtés : mais l'angle adb, dont le sommet d est à la circonférence, a pour mesure la moitié du même arc; l'angle adb est donc effectivement égal à l'angle observé ADB. On démontrerait de la même manière que l'angle bdc est égal à l'angle observé BDC; le point d est donc l'homologue du point D.

Il faut maintenant indiquer comment on peut *calculer le nombre de degrés de l'arc qui est égal en longueur au rayon.* Les longueurs des arcs étant proportionnelles aux nombres des degrés qui les composent, si l'on désigne par π la longueur de l'arc de 180° dans le cercle dont le rayon est l'unité, le nombre de degrés de l'arc égal à l'unité sera exprimé par le quatrième terme de la proportion

$$\pi : 1 :: 180° :: x.$$

Divisant 180° par la valeur de π, qui est 3,14159265358979З &c., on trouvera 57° 17′ 44″ pour l'arc x dont la longueur est égale au rayon.

85. Ce qui précède renferme la démonstration de la plupart des formules qui sont en usage dans la résolution des triangles rectilignes, et il est facile d'en déduire celles qui n'y sont pas énoncées. Les exemples numériques que l'on a choisis pour les appliquer, ont été calculés avec des tables de logarithmes à cinq décimales ; mais le degré d'approximation auquel ces tables font parvenir, et qui suffit pour toutes les opérations de détail du *Cadastre*, n'est plus assez rigoureux quand il s'agit de triangles du

du premier ordre dont les côtés sont très-grands. Je supposerai donc, dans l'exemple suivant, que l'on a entre les mains les Tables de logarithmes de *Callet*, et que, par les procédés indiqués dans l'Instruction qui les précède, on a le soin d'estimer, à moins d'un millième près, les nombres dont les logarithmes n'y sont pas écrits tout entiers; que de même on évalue les derniers chiffres décimaux de la valeur du logarithme des nombres et des arcs compris entre ceux de la table, ou qui excèdent son étendue.

Je ne rapporterai ici que les détails et les résultats du calcul qui est fondé sur les principes exposés dans ce chapitre et dans l'Instruction citée.

86. I.er PROBLÈME *(fig. 6)*. Dans le triangle ABC, on connaît le côté b et les deux angles adjacens A et C; déterminer l'angle B et les côtés a, c.

$$\left.\begin{aligned} \text{Soient } A &= 47^\circ\ 58'\ 30'', \\ C &= 39^\circ\ 36'\ 20'', \\ b &= 24385 \text{ mètres}, \end{aligned}\right\}$$

l'angle $B = 180^\circ - [47^\circ\ 58'\ 30'' + 39^\circ\ 36'\ 20'']$;
d'où $B = 92^\circ\ 25'\ 10''$.

On obtiendra les deux côtés a et c par les deux proportions suivantes (n.° 49):

$$\left.\begin{aligned} \sin. 92^\circ\ 25'\ 10'' : \sin. 47^\circ\ 58'\ 30'' :: 24385 : a, \\ \sin. 92^\circ\ 25'\ 10'' : \sin. 39^\circ\ 36'\ 20'' :: 24385 : c; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \log. 24385 \text{ mètres} &= 4{,}3871228, \\ \log. \sin. 47^\circ\ 58'\ 30'' &= 9{,}8709028, \\ \text{compl. } \log. \sin. 92^\circ\ 25'\ 10'' &= 0{,}0003873. \end{aligned}\right\}$$

$$\log. a = 14{,}2584129.$$

$$\left.\begin{aligned} \log. 24385 \text{ mètres} &= 4{,}3871228, \\ \log. \sin. 39^\circ\ 36'\ 20'' &= 9{,}8044793, \\ \text{compl. } \log. \sin. 92^\circ\ 25'\ 10'' &= 0{,}0003873. \end{aligned}\right\}$$

$$\log. c = 14{,}1919894.$$

Supprimant dans log. a et log. c l'unité de dixaines introduite par le complément du log. de sin. $92^\circ\ 25'\ 10''$, et estimant, à moins d'un millième près, les nombres auxquels appartiennent ces deux logarithmes qui ne se trouvent pas dans les tables, on obtient

$$a = 18130^{m}{,}629;\ c = 15559^{m}{,}276.$$

87. II.e PROBLÈME (*fig. 6*). Dans le triangle ABC, on connaît les deux côtés a, b, et l'angle A opposé au côté a; déterminer les deux angles B et C et le troisième côté c.

$$\text{Soient } \left.\begin{aligned} A &= 47^\circ\ 58'\ 30'' \\ a &= 18130^m,629, \\ b &= 24385^m,\ldots \end{aligned}\right\}$$

La proportion suivante fera connaître l'angle B (n.° 50):

$$18130^m,629 : 24385^m :: \sin.\ 47^\circ 58' 30'' : \sin.\ B,$$

$$\left.\begin{aligned} \log.\ \ 24385 &= 4,3871228, \\ \log.\ \sin.\ 47^\circ\ 58'\ 30'' &= 9,8709028, \\ \text{compl. log.}\ \ 18130,629 &= 5,7415871. \end{aligned}\right\}$$

$$\log.\ \sin.\ B = \cancel{1}9,9996127.$$

Ce logarithme, que l'on trouve tout entier dans la table, appartient à l'angle de 87° 34′ 50″, ou à son supplément 92° 25′ 10″. Pour expliquer cette double solution, *voyez* le n.° 17 de ce chapitre. Nous adopterons la dernière valeur; ce qui donne

$$B = 92^\circ\ 25'\ 10''.$$

De la connaissance des angles A et B on peut conclure l'angle C, et l'on trouve

$$C = 39^\circ\ 36'\ 20''.$$

Il reste encore à calculer le côté c; on l'obtiendra par cette proportion:

$$\sin.\ 92^\circ 25' 10'' : \sin.\ 39^\circ 36' 20'' :: 24385 : c,$$

$$\left.\begin{aligned} \log.\ \ 24385 &= 4,3871228, \\ \log.\ \sin.\ 39^\circ 36' 20'' &= 9,8044793, \\ \text{compl. log. sin. } 92^\circ\ 25'\ 10'' &= 0,0003873. \end{aligned}\right\}$$

$$\log.\ c = \cancel{1}4,1919894.$$

On trouve, avec la correction obligée, que ce logarithme est celui du nombre 15559m,276.

Dans cet exemple, il a fallu également déterminer par la méthode ordinaire le logarithme du nombre 18130m,629, qui excède l'étendue des tables.

88. III.e PROBLÈME. Dans le triangle ABC, si l'on connaît les trois côtés b, c, a, déterminer les trois angles.

Il est évident que quand on sera parvenu à la connaissance de l'un des

angles, la détermination des deux autres dépendra d'une proportion analogue à celles employées dans les deux problèmes précédens.

Pour obtenir cet angle, on peut faire usage du principe énoncé (n.° 48): mais la formule la plus simple dont on puisse se servir, est renfermée dans la règle suivante, dont on peut lire la démonstration dans la Trigonométrie de M. *Legendre* (n.° LVII):

« Le cosinus de la moitié de l'un des angles du triangle est égal à la » racine carrée d'une fraction, dont le numérateur est le produit du carré » du rayon par la demi-somme des trois côtés du triangle et par la » différence de cette demi-somme au côté opposé à l'angle que l'on veut » déterminer, et dont le dénominateur est le produit des deux côtés qui » comprennent cet angle. »

En appelant R le rayon et S la demi-somme des trois côtés du triangle ABC, la formule peut s'écrire ainsi:

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{R^2.S.(S-a)}{bc}\right)}.$$

Il est préférable d'avoir recours au principe du n.° 48, si l'angle A est petit; mais comme dans les travaux géodésiques on s'attache à ne point observer d'angles qui soient au-dessous de 25°, on peut avec confiance employer la formule ci-dessus. Il est d'autant plus important d'obtenir sa valeur avec une grande précision, que l'erreur, si on en laisse introduire de sensible, sera doublée dans la détermination de A.

Soient donc

$$\left.\begin{aligned} b &= 24385^{m}, \\ c &= 15559{,}276, \\ a &= 18130{,}629. \end{aligned}\right\}$$

Type du calcul:

$$\left.\begin{aligned} 2S &= 58074{,}905\ , \\ S &= 29037{,}4525\ , \\ S-a &= 10906{,}8235. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{log.}\ \ S &= 4{,}4629585, \\ \text{log.}\ (S-a) &= 4{,}0376983, \\ \text{log.}\ \ R^2 &= 20{,}0000000, \\ \text{compl. log.}\ \ b &= 5{,}6128772, \\ \text{compl. log.}\ \ c &= 5{,}8080106. \end{aligned}\right\}$$

$$\text{log.}\ \frac{R^2.S.(S-a)}{b.c} = 39{,}9215446 = \text{log. cos.}^2 \tfrac{1}{2} A.$$

Otant de ce logarithme * les deux dixaines introduites par les complémens, et prenant ensuite la moitié, on aura le logarithme de cos. $\frac{1}{2}A$. Donc

$$\log.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}A = 9{,}9607723.$$

Ce logarithme ne se trouve pas exactement dans la table des sinus ; en y apportant la correction nécessaire, on obtient, à moins d'une seconde près,

$$\tfrac{1}{2}A = 23^\circ\ 59'\ 15'';$$

d'où

$$A = 47^\circ\ 58'\ 30''.$$

Il reste encore à se procurer les deux autres angles : on pourrait appliquer de nouveau la même formule à la recherche de l'angle B ; mais il est plus simple de l'obtenir par cette proportion,

$$18130^m{,}629 : 24385^m :: \sin.\ 47^\circ\ 58'\ 30'' : \sin.\ B,$$

qui a été traitée dans le second cas, et qui a donné

$$B = 92^\circ\ 25'\ 10''.$$

Le troisième angle C se déduira de la connaissance des angles A et B, et l'on aura

$$C = 39^\circ\ 36'\ 20''.$$

89. IV.e **Problème.** Dans le triangle ABC, si l'on connaît l'angle B et les deux côtés a, c, qui le comprennent, déterminer les deux autres angles A, C, et le troisième côté b.

Pour ramener ce dernier cas à l'un des précédens, il suffit de déterminer l'un des angles A et C. On y parviendra facilement avec le secours de l'analogie exposée au n.° 51 de ce chapitre.

Nous substituerons encore ici à l'usage de cette analogie, la formule suivante, dont on trouve également l'exposition dans l'ouvrage de M. *Legendre* (n.° LVI), et dont voici l'énoncé :

« Formez une fraction dont le numérateur soit le produit de la tangente

---

* On peut remarquer que les deux dixaines qu'il faut retrancher de la somme 39,9215446, pour corriger l'excès introduit par les complémens, sont égales à log. R^2 ; de manière qu'il n'y aurait aucune correction à apporter dans ce résultat, si l'on négligeait de comprendre log. R^2 parmi les termes de l'addition. Lors donc qu'on s'assujettira à employer le complément des logarithmes du diviseur (b, c), la formule pourra se réduire à cette forme plus simple,

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left(\frac{s(s-a)}{bc}\right)}.$$

» de la moitié de l'angle donné B par la somme $a + c$ des deux côtés qui » le comprennent, et dont le dénominateur soit la différence $a - c$ de » ces deux côtés; cette fraction représentera la tangente d'un certain angle, » duquel retranchant la moitié de l'angle B, on aura pour reste l'un des » deux angles cherchés. »

Appelant M l'angle dont la fraction représente la tangente, on a

$$\text{tang. } M = \frac{a+c}{a-c} \text{ tang. } \tfrac{1}{2} B;$$

puis

$$M - \tfrac{1}{2} B = A \text{ ou } C.$$

Les deux côtés a et c étant connus, et sachant que dans un triangle les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés, il ne peut y avoir d'équivoque pour fixer à quel côté doit être opposé l'angle $M - \frac{1}{2} B$.

Soient donc

$$\left.\begin{aligned} B &= 92^\circ\ 25'\ 10'', \\ a &= 18130^m,629, \\ c &= 15559,\ 276. \end{aligned}\right\}$$

Type du calcul :

$$\left.\begin{aligned} a + c &= 33689,905, \\ a - c &= 2571,353, \\ \tfrac{1}{2} B &= 46^\circ\ 12'\ 35''. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \log(a+c) &= 4,5274998, \\ \log.\text{ tang. } \tfrac{1}{2} B &= 10,0183445, \\ \text{compl. log. }(a-c) &= 6,5898383. \end{aligned}\right\}$$

$$\log.\text{ tang. } M = 21,1356826 - 10,$$

ou

$$\log.\text{ tang. } M = 11,1356826.$$

Cherchant l'arc M, à moins d'une seconde près, on trouvera

$$M = 85^\circ\ 48'\ 55''.$$

Retranchant de cet arc l'angle

$$\tfrac{1}{2} B = 46^\circ\ 12'\ 35'',$$

on aura pour différence $39^\circ\ 36'\ 20''$. Donc le troisième angle du triangle proposé sera de $47^\circ\ 58'\ 30''$.

Maintenant il est facile de voir que ce dernier angle est opposé au côté a, et le précédent au côté b.

Enfin, pour obtenir le côté b, on fera la proportion

$$\sin. 47^\circ\ 58'\ 30'' : \sin. 92^\circ\ 25'\ 10'' :: 18130{,}629 : b.$$

Le calcul conduit à

$$b = 24385^{\text{mètres}}.$$

Les erreurs que l'on pourrait craindre de commettre en négligeant les corrections que nous avons apportées dans ces calculs, ont été rendues sensibles sur des exemples, aux articles 64 et suivans.

CHAPITRE II.

DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR M.r POMMIÉS.

§. I.er

90. LA sphère est un solide terminé par une surface courbe, dont tous les points sont également distans d'un point intérieur qu'on appelle le *centre.*

91. Un triangle sphérique est l'espace compris sur la surface d'une sphère, entre trois arcs de grands cercles qui forment les côtés de ce triangle.

92. Comme le plan de tout grand cercle de la sphère passe par son centre, la section commune de deux grands cercles, qui est une ligne droite, passe aussi par ce point. Ainsi chacun des trois grands cercles qui concourent à former un triangle sphérique, coupe les deux autres suivant des lignes droites qui sont des diamètres de la sphère.

93. Deux grands cercles d'une sphère se coupent nécessairement; autrement leurs plans coïncideraient, et ne formeraient qu'un seul et même cercle. Les côtés d'un triangle sphérique peuvent toujours être supposés plus petits qu'une demi-circonférence.

94. *(Fig. 1.)* Un angle sphérique ACB est égal à l'angle que font entre eux les plans des deux grands cercles auxquels appartiennent les arcs AC, BC: il n'est donc autre chose que l'angle qui serait formé par deux lignes droites, menées dans les plans de ces grands cercles perpendiculairement à un même point de leur section commune. Par conséquent, l'angle des deux tangentes mc, nc, est le même que celui des deux arcs BC, AC, auxquels ces tangentes sont menées.

95. On nomme pôles d'un grand cercle les extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan de ce grand cercle; d'où il suit que chaque pôle est distant de 90° de tous les points de la circonférence du cercle auquel il se rapporte.

96. On déduit encore de là, que quand les pôles de deux grands cercles sont éloignés l'un de l'autre de 90°, ces cercles sont perpendiculaires entre eux, puisque l'un passe par une ligne perpendiculaire à l'autre ; et réciproquement, quand les plans de deux grands cercles sont perpendiculaires entre eux, l'un de ces cercles passe par les pôles de l'autre.

97. *(Fig. 2.)* Si du sommet de l'angle A d'un triangle sphérique, comme pôle, on décrit un arc de grand cercle EF qui rencontre en E, F les arcs AB, AC, prolongés, s'il est nécessaire, cet arc EF sera la mesure de l'angle A: car si des points E, F on mène au centre O de la sphère les rayons EO, OF, ils seront évidemment perpendiculaires à la section commune AO des deux cercles auxquels les arcs AB, AC appartiennent ; et par conséquent l'arc EF, qui est la mesure de l'angle rectiligne EOF, sera aussi la mesure de l'angle sphérique BAC (n.° 94).

98. *(Fig. 4.)* Si des points D, B situés sur une sphère, et distans l'un de l'autre de 90°, on décrit, comme pôles, deux arcs de grands cercles DF, BF, qui se couperont en F à angles droits ; qu'ensuite par les deux mêmes points B, D on fasse passer les arcs BE, DA qui se coupent en C, on aura deux triangles sphériques BAC, DEC, dans lesquels les arcs BC, CE, sont complémens l'un de l'autre ; et les angles B et D sont complémens des côtés DE, BA, puisque ces angles ont pour mesure les arcs EF, AF, et que l'on a l'arc $DF = BF = 90°$ (96).

Les deux triangles BCA, CDE, se désignent sous le nom de *triangles complémentaires.*

99. *(Fig. 7.)* Dans un triangle sphérique ABC, si des points A, B, C, comme pôles, on décrit les arcs DE, DF, EF formant le triangle DEF, réciproquement les points D, E, F seront les pôles des côtés AB, AC, BC; chaque côté du triangle DEF est supplément de l'angle qui lui est opposé dans le triangle ABC, et chaque angle de ce même triangle DEF est le supplément du côté qui lui est opposé dans le triangle ABC.

Les deux triangles ABC, DEF, sont dits *triangles supplémentaires*, ou *triangles polaires.* Voyez les Élémens de M. *Legendre* (liv. 7, prop. IX et X).

100. Il sera utile, pour ce qui va suivre, de se rappeler les divers caractères

caractères auxquels on reconnaît l'égalité de deux triangles sphériques, ainsi que cette proposition :

Dans un triangle sphérique ABC, *si l'angle* A *est plus grand que l'angle* B, *le côté* a *opposé à l'angle* A *sera plus grand que le côté* b *opposé à l'angle* B; *et, réciproquement, si le côté* a *est plus grand que* b, *l'angle* A *sera plus grand que l'angle* B.

On peut lire la démonstration de ces théorèmes dans le septième livre des Élémens de géométrie par M. *Legendre* (prop. XII, XIII, XIV, XV, XVI).

101. Un triangle sphérique rectangle peut avoir ses trois angles droits, et alors ses trois côtés sont de 90°. Il peut n'avoir seulement que deux angles droits; alors les côtés opposés sont de 90°, et le troisième angle a pour mesure le troisième côté. La résolution de ces deux sortes de triangles sphériques ne présente aucune difficulté. Nous supposerons donc dans les principes que nous allons établir, que le triangle rectangle auquel on les rapporte, ne renferme qu'un seul angle droit. Dans les triangles sphériques rectangles, les arcs opposés aux angles droits s'appellent *hypoténuses*, comme les lignes droites opposées aux mêmes angles dans les triangles rectilignes.

De la résolution des Triangles sphériques rectangles.

La résolution des triangles sphériques rectangles est fondée sur les cinq théorèmes suivans.

102. THÉORÈME I. *(Fig. 1.)* Dans tout triangle sphérique rectangle BAC, on a les deux proportions suivantes :

1.° *Le rayon est au sinus de l'angle* C *comme le sinus de l'hypoténuse* BC = a *est au sinus du côté* AB = c *opposé à l'angle* C;

2.° *Le rayon est au cosinus de l'angle* C *comme la tangente de l'hypoténuse* BC = a *est à la tangente du côté* AC = b, *adjacent à l'angle* C;

c'est-à-dire qu'on a ces deux proportions :

1.° $R : \sin. C :: \sin. a : \sin. c$,

2.° $R : \cos. C :: \text{tang}. a : \text{tang}. b$.

Démonstration. Du point C comme pôle, décrivez l'arc de grand cercle EF qui rencontre en E et F le prolongement des arcs CB, CA du triangle proposé; cet arc EF sera la mesure de l'angle C. Du centre O de la sphère, conduisez les rayons OE, OF, OB, OA, OC, et menez

les sinus EH, BI, BK des arcs EF, BA, BC; enfin joignez I, K, par la droite IK: cette droite sera une perpendiculaire commune au rayon OC et au sinus BI. En effet, puisque l'angle A est droit, le sinus BI, tracé dans le plan de l'arc BA, est perpendiculaire au plan AOC sur lequel IK est situé; et, d'une autre part, le plan IBK passant par BK est, pour cette raison, perpendiculaire à OC.

Menez encore les tangentes CM, CN des côtés CB et CA; le plan qu'elles déterminent étant perpendiculaire au rayon CO, le sera par conséquent au plan OCF; d'un autre côté, le plan $MBOAN$, que nous avons déjà observé être perpendiculaire au plan OCF, coupe le plan tangent MCN suivant la ligne MN, qui sera donc perpendiculaire sur NC, puisque MN est l'intersection commune de deux plans MON, MCN, tous deux perpendiculaires à OCF sur lequel NC est tracée.

Ces constructions bien entendues, les droites EO, BK, MC, qui sont situées dans le même plan $EOCM$, et qui sont toutes perpendiculaires au rayon OC, sont parallèles. Par une raison semblable, les lignes FO, IK, NC sont parallèles; donc les angles EOF, BKI, MCN sont égaux, et les trois triangles rectangles EOH, BKI, MCN sont semblables; d'où il suit que l'on a les deux proportions suivantes:

$$1.° \; OE : EH :: BK : BI,$$

$$2.° \; OE : OH :: CM : CN.$$

Substituant aux termes de ces proportions leurs valeurs trigonométriques, on obtient,

$$1.° \; R : \sin. C :: \sin. BC : \sin. BA,$$

$$2.° \; R : \cos. C :: \text{tang}. BC : \text{tang}. AC.$$

Ces proportions sont celles qui forment l'énoncé du théorème.

103. Corollaire I. Il suit de là que dans un triangle sphérique quelconque ABC,

Les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés opposés.

(*Fig. 3.*) En effet, si d'un angle C on abaisse l'arc CD perpendiculaire à l'arc AB, on aura, par la première partie du théorème précédent,

$$1.° \sin. A : R :: \sin. CD : \sin. b,$$

$$2.° \; R : \sin. B :: \sin. a : \sin. CD.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et supprimant les facteurs R et sin. CD, il vient

$$\sin. A : \sin. B :: \sin. a : \sin. b.$$

104. COROLLAIRE II. Deux triangles rectangles sphériques ADC, BDC, qui ont un côté commun CD, fournissent cette proportion :

(Fig. 3.) *Les cosinus des angles* ACD, BCD, *que forme ce côté avec les hypoténuses, et que l'on nomme* angles verticaux, *sont entre eux en raison inverse des tangentes des hypoténuses ;*

car la seconde partie du théorème précédent donne,

1.° $\cos. ACD : R :: \text{tang. } CD : \text{tang. } b$,

2.° $R : \cos. BCD :: \text{tang. } a : \text{tang. } CD$.

Multipliant de même ces deux proportions par ordre, et supprimant dans les termes du produit les facteurs communs R et tang. CD, il restera

$$\cos. ACD : \cos. BCD :: \text{tang. } a : \text{tang. } b.$$

105. THÉORÈME II. Dans tout triangle sphérique rectangle,

Le rayon est au cosinus d'un des côtés de l'angle droit comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypoténuse ;

c'est-à-dire que,

$$R : \cos. c :: \cos. b : \cos. a.$$

Démonstration. (*Fig. 4.*) Soit le triangle rectangle BAC. Du point B, comme pôle, décrivez l'arc FED. Les deux arcs FED, ACD, étant l'un et l'autre perpendiculaires à l'arc BAF, se coupent en un point D qui est distant de 90° des points B, A, F, et le triangle DEC, rectangle en E, est le triangle complémentaire du triangle rectangle proposé BAC. Or, dans le triangle DEC, on a (théorème précédent, n.° 1),

$$R : \sin. D :: \sin. DC : \sin. CE.$$

Mais l'angle D est complément de l'arc BA; l'arc DC est le complément de CA; CE est complément de BC; donc la proportion précédente devient,

$$R : \cos. c :: \cos. b : \cos. a.$$

106. COROLLAIRE. Donc, si deux triangles sphériques rectangles ADC, BDC, ont le côté commun CD, ils conduiront à cette proportion :

(Fig. 3.) *Les cosinus des bases* AD, BD, *sont entre eux comme les cosinus des hypoténuses* AC, BC;

car (théorème II);

1.° $\cos. AD : R :: \cos. b : \cos. CD$,

2.° $R : \cos. BD :: \cos. CD : \cos. a$;

d'où multipliant par ordre,

$$\cos. AD : \cos. BD :: \cos. b : \cos. a.$$

107. THÉORÈME III. Dans tout triangle sphérique rectangle, on a,

(Fig. 4.) *Le rayon est au sinus d'un des angles obliques* C, *comme le cosinus du côté* AC = b, *adjacent à cet angle, est au cosinus de l'angle* B *opposé au côté* b,

ou

$$R : \sin. C :: \cos. b : \cos. B.$$

Démonstration. Soit le triangle rectangle BAC. En faisant la même construction que pour le théorème précédent, le triangle rectangle complémentaire DEC donne (théorème I, n.° 1),

$$R : \sin. DCE :: \sin. DC : \sin. DE.$$

Rapportant cette proportion au triangle BAC, on a

$$R : \sin. C :: \cos. b : \cos. B,$$

c'est-à-dire le résultat qu'on se proposait de découvrir.

108. COROLLAIRE. On peut déduire de cette proposition, que dans les deux triangles rectangles sphériques ADC, BDC, qui ont le côté commun CD, on a cette proportion :

Les sinus des angles verticaux sont entre eux comme les cosinus des angles à la base.

En effet, le triangle ACD donnera,

$$\sin. ACD : R :: \cos. A : \cos. CD.$$

De même le triangle DCB conduit à la proportion,

$$R : \sin. DCB :: \cos. CD : \cos. B.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et supprimant les facteurs communs, il vient,

$$\sin. ACD : \sin. BCD :: \cos. A : \cos. B.$$

109. THÉORÈME IV. Dans tout triangle sphérique rectangle,

Le rayon est au sinus de l'un AB = c *des côtés, comme la tangente de l'angle oblique* B, *adjacent à ce côté, est à la tangente du côté* AC = b *opposé à l'angle* B;

c'est-à-dire que l'on a,

$$R : \sin. c :: \text{tang. } B : \text{tang. } b.$$

Démonstration. (Fig. 4.) En appliquant au triangle complémentaire DEC la seconde analogie du théorème I, on a,

$$R : \cos. D :: \text{tang.}\ DC : \text{tang.}\ DE;$$

rapportant cette analogie au triangle BAC, elle devient,

$$R : \sin. c :: \cot. b : \cot. B.$$

Mais, en ayant égard aux valeurs de la tangente et de la cotangente d'un arc *(p)* (n.° 31 du chapitre Ier), on peut écrire cette proportion :

$$\cot. b : \cot. B :: \frac{r \cos. b}{\sin. b} : \frac{r \cos. B}{\sin. B}.$$

Multipliant les deux termes du second rapport par sin. B. sin. b, puis divisant les résultats de cette opération par cos. B cos. b, on obtient,

$$\cot. b : \cot. B :: \frac{r \sin. B}{\cos. B} : \frac{r \sin. b}{\cos. b}, \text{ ou (n.° 31)}$$

$$\cot. b : \cot. B :: \text{tang.}\ B : \text{tang.}\ b.$$

Donc, si l'on substitue, dans la proportion précédente, le second rapport de cette dernière analogie au rapport des cotangentes de b et de B, on aura,

$$R : \sin. c :: \text{tang.}\ B : \text{tang.}\ b.$$

110. COROLLAIRE. Donc dans deux triangles rectangles sphériques ACD, BCD, qui ont le côté commun CD, on a,

(Fig. 3.) *Les sinus des bases* AD, BD, *sont entre eux en raison inverse des tangentes des angles* A *et* B;

car, par le théorème précédent, le triangle ACD donne cette proportion :

$$\sin. AD : R :: \text{tang.}\ CD : \text{tang.}\ A.$$

De même le triangle BCD donne

$$R : \sin. BD :: \text{tang.}\ B : \text{tang.}\ CD.$$

Multipliant ces proportions, on obtient pour résultat l'énoncé ci-dessus ; savoir :

$$\sin. AD : \sin. BD :: \text{tang.}\ B : \text{tang.}\ A.$$

111. THÉORÈME V. Dans tout triangle rectangle sphérique BAC, on a cette proportion :

Le rayon est au cosinus de l'hypoténuse BC = a, *comme la tangente de l'un des angles obliques* C *est à la cotangente de l'autre angle oblique* B, ou

$$R : \cos. a :: \text{tang.}\ C : \cot. B.$$

Démonstration. (Fig. 4.) En effet, par la proposition qui précède, le triangle rectangle complémentaire CDE fournit cette analogie :

$$R : \sin. CE :: \text{tang.}\ DCE : \text{tang.}\ DE.$$

Rapportant cette proportion au triangle BAC, elle devient,

$$R : \text{cos. } a :: \text{tang. } C : \text{cot. } B.$$

§. II.

112. Ces cinq théorèmes, avec les corollaires que nous en avons déduits, suffisent à la résolution de tous les cas des triangles sphériques rectangles, et satisfont à la plupart de ceux que présentent les triangles sphériques quelconques, comme on peut le voir dans les deux tableaux qui terminent ce traité.

Il y a deux cas seulement des triangles sphériques en général, qui exigent encore de nouveaux principes ; savoir, celui où, connaissant les trois côtés, on se propose d'obtenir un angle, et celui où l'on cherche la valeur d'un des côtés par la connaissance des trois angles.

Les trois théorèmes suivans ont pour objet de donner des formules propres à la résolution de ces deux derniers cas.

113. THÉORÈME VI. Dans un triangle sphérique quelconque ABC, on a cette proportion :

(Fig. 5.) *Le produit des sinus des côtés* AB=c, BC=a *d'un angle quelconque* ABC, *est au produit des sinus des deux excès de la demi-somme des trois côtés sur chacun de ces deux côtés, comme le carré du rayon est au carré du sinus de la moitié de l'angle cherché,*

ou

$$\text{sin. } a \times \text{sin. } c : \text{sin. } (\tfrac{1}{2}s - a) \times \text{sin. } (\tfrac{1}{2}s - c) :: R^2 : \text{sin.}^2 \tfrac{1}{2}B.$$

Démonstration. Dans le triangle sphérique quelconque BAC, on connaît les trois côtés a, b, c, dont on représentera la somme par s, et l'on se propose de déterminer avec ces données la valeur de l'angle B.

Réunissez les sommets des angles du triangle sphérique avec le centre de la sphère par les rayons BO, AO, CO. Du point A, abaissez sur le plan BOC la perpendiculaire AF, et par cette ligne AF menez un plan APF auquel le rayon BO soit perpendiculaire. L'angle rectiligne APF est celui des deux plans CBO, ABO, et par conséquent il mesure aussi l'angle sphérique B.

Autour des rayons BO, CO, faites tourner les secteurs BOA, AOC, jusqu'à ce qu'ils soient appliqués sur le prolongement du plan BOC. La figure 6 représente ce développement. Les parties AB, BC, CD de l'arc total $ABCD$, sont respectivement égales aux trois côtés du

triangle sphérique. Si des points A et D on abaisse sur les rayons BO et CO les perpendiculaires AP, DE, prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en F, il est facile de voir que ce point représente sur le plan BOC le pied de la perpendiculaire abaissée, avant le développement, du sommet de l'angle A. En effet, si l'on conçoit que les secteurs BAO, COD, tournent de nouveau autour des rayons BO, CO, jusqu'à ce que les lignes AO, DO se confondent, les angles rectilignes APF, DEF formés pendant ce mouvement, seront respectivement égaux aux angles sphériques B et C (*fig.* 5); car ils mesurent les angles $ABOC$, $BCOD$ que forment les secteurs avec le plan BOC.

(*Fig.* 6.) Maintenant, pour construire sur la figure plane $ABHDO$ l'angle rectiligne $APF=B$, on élevera du point F la perpendiculaire FG, que l'on terminera par un arc décrit du point P, comme centre, avec un rayon égal à AP, et l'on menera GP. Il est évident que le triangle rectangle GPF est égal au triangle APF de la figure 5, et, par conséquent, que l'angle $FPG = B$.

Terminez la demi-circonférence AGH, et prolongez AF jusqu'en H, on aura $AH = 2AP$, et l'arc $ABH = 2AB$. Menez enfin les lignes AG, GH et HD.

Toutes ces constructions étant bien comprises, on a,

1.° Le triangle rectangle AHG, qui donne la proportion suivante,

$$R : \sin. GAH :: AH : GH;$$

ou, élevant tous ces termes au carré,

$$R^2 : \sin.^2 GAH :: \overline{AH}^2 : \overline{GH}^2;$$

d'une autre part, par la propriété du triangle rectangle, on a

$$\overline{AH}^2 : \overline{GH}^2 : AH :: FH;$$

donc, à cause du rapport commun, il résulte,

$$R^2 : \sin.^2 GAH :: AH : FH \ldots\ldots (1).$$

Or, si l'on observe que l'angle FPG est l'angle extérieur du triangle isocèle APG, on aura $GAH = \frac{1}{2} FPG = \frac{1}{2} B$. De plus, AH est la corde de l'arc $2AB = 2c$. Donc $AH = 2 \sin. c$.

Substituant ces valeurs dans la proportion (1), elle devient,

$$R^2 : \sin.^2 \tfrac{1}{2} B :: 2 \sin. c : FH \ldots\ldots (2).$$

Il reste encore à déterminer FH.

2.° Pour cela, on considérera le triangle HFD qui conduit à cette proportion,

$$\sin. HFD : HD :: \sin. HDF : FH;$$

d'où

$$FH = \frac{HD \times \sin. HDF}{\sin. HFD}.$$

Or, l'arc $HbD = ABHD - ABH = (s - 2c)$. Donc la corde HD de cet arc est égale à

$$2 \sin. (\tfrac{1}{2} s - c).$$

Les lignes AH et DF donnent, par leur rencontre,

$$AFD + DFH = 2d;$$

et si l'on considère le quadrilatère $FPOE$, dans lequel les angles P et E sont droits, on aura

$$BOC + AFD = 2d:$$

donc $DFC = BOC$, dont la mesure est l'arc a, et $\sin. DFH = \sin. BOC = \sin. a$.

Enfin, si l'on prolonge la ligne AH d'une longueur quelconque HI, on aura,

$$IHD = FDH + HFD;$$

d'où

$$HDF = IHD - HFD = \tfrac{1}{2} s - a.$$

En effet, la mesure de l'angle IHD formé par une corde et une sécante est $\frac{1}{2} ABH + \frac{1}{2} HD$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2} s$; et celle de HFD est l'arc a. Donc

$$\sin. HDF = \sin. (\tfrac{1}{2} s - a).$$

Substituant dans FH les valeurs que l'on vient de trouver pour les différens termes de l'expression de cette ligne, on obtient

$$FH = \frac{2 \sin. (\frac{1}{2} s - c) \times \sin. (\frac{1}{2} s - a)}{\sin. a},$$

Transportant cette valeur de FH dans la proportion (2), on a

$$R^2 : \sin.^2 \tfrac{1}{2} B :: 2 \sin. c : \frac{2 \sin. (\frac{1}{2} s - c). \sin. (\frac{1}{2} s - a)}{\sin. a}.$$

Divisant les deux termes du second rapport par 2, les multipliant ensuite par $\sin. a$, et écrivant ce second rapport avant le premier, il vient,

$$\sin. a . \sin. c : \sin. (\tfrac{1}{2} s - a) . \sin. (\tfrac{1}{2} s - c) :: R^2 : \sin.^2 \tfrac{1}{2} B;$$

d'où

d'où

$$\sin.\tfrac{1}{2}B = R\sqrt{\left(\frac{\sin.(\frac{1}{2}s - a).\sin.(\frac{1}{2}s - c)}{\sin.a.\sin.c}\right)},$$

formule qui fait connaître un angle d'un triangle sphérique, quand les trois côtés sont donnés. Il est facile de remarquer son analogie avec celle exposée n.° 43 du chapitre précédent, pour le cas semblable de la trigonométrie rectiligne.

114. Théorème VII. Dans tout triangle sphérique quelconque, on a cette proportion :

Le produit des sinus des côtés AB = c, BC = a *d'un angle quelconque* ABC, *est au produit du sinus de la demi-somme des trois côtés par le sinus de l'excès de cette demi-somme sur le côté opposé à l'angle* ABC, *comme le carré du rayon est au carré du cosinus de la moitié de l'angle cherché,*

ou

$$\sin.a \times \sin.c : \sin.\tfrac{1}{2}s \times \sin.(\tfrac{1}{2}s - b) :: R^2 : \cos.^2\tfrac{1}{2}B.$$

Démonstration. (*Fig. 6.*) Conservant la construction précédente, et menant de plus la corde AD, elle exprimera le double du sinus de la demi-somme des trois côtés du triangle sphérique ABC, on aura donc,

$$AD = 2\sin.\tfrac{1}{2}s.$$

1.° Le triangle rectangle AGH donne cette proportion,

$$R : \sin.GHA :: AH : AG.$$

Élevant tous ces termes au carré, on a,

$$R^2 : \sin.^2 GHA :: AH^2 : AG^2.$$

Le même triangle donne encore,

$$\overline{AH}^2 : AG^2 :: AH : AF;$$

donc

$$R^2 : \sin.^2 GHA :: AH :: AF \ldots\ldots (1).$$

Or, dans le théorème précédent, on a trouvé que,

$$GAH = \tfrac{1}{2}B;$$

et puisque GHA est le complément de GAH, il en résulte,

$$\sin.^2 GHA = \cos.^2\tfrac{1}{2}B.$$

On a de plus la corde $AH = 2\sin.c$. Ces valeurs substituées dans la proportion (1) lui donnent cette forme,

$$R^2 : \cos.^2\tfrac{1}{2}B :: 2\sin.c : AF \ldots\ldots (2).$$

Il reste encore à déterminer AF.

2.° Pour cela, on considérera le triangle AFD, dans lequel on a cette proportion,

$$\sin. AFD : AD :: \sin. FDA : AF;$$

d'où

$$AF = \frac{AD \times \sin. FDA}{\sin. AFD}.$$

Or, on a déjà vu que $AD = 2 \sin. \frac{1}{2} s$. L'angle FDA, dont le sommet D est sur la circonférence, a pour mesure $\frac{s - 2b}{2}$. Donc

$$\sin. FDA = \sin. (\tfrac{1}{2} s - b).$$

De plus le sin. AFD est égal à celui de l'angle supplémentaire DFH, que l'on a démontré, dans le théorème précédent, valoir l'angle BOC. Donc

$$\sin. AFD = \sin. a.$$

Substituant ces diverses valeurs dans l'expression de AF, on obtient

$$AF = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} s . \sin (\frac{1}{2} s - b)}{\sin. a}.$$

Transportant ce résultat dans la proportion (2), on a,

$$R^2 : \cos.^2 \tfrac{1}{2} B :: 2 \sin. c : \frac{2 \sin. \frac{1}{2} s \times \sin. (\frac{1}{2} s - b)}{\sin. a},$$

Supprimant le facteur commun 2, multipliant les deux termes par sin. a, et écrivant le second rapport à la place du premier, il vient,

$$\sin. a . \sin. c : \sin. \tfrac{1}{2} s . \sin. (\tfrac{1}{2} s - b) :: R^2 : \cos.^2 \tfrac{1}{2} B,$$

d'où

$$\cos. \tfrac{1}{2} B = R \sqrt{\left(\frac{\sin. \frac{1}{2} s . \sin. (\frac{1}{2} s - b)}{\sin. a \sin. c}\right)},$$

formule qui sert, ainsi que la précédente, à calculer un angle d'un triangle sphérique, quand ses trois côtés sont connus.

115. Théorème VIII. Les trois angles d'un triangle sphérique quelconque étant donnés, on peut trouver le côté qu'on voudra par cette proportion :

Le produit des sinus des angles adjacens au côté cherché est au produit des cosinus de la demi-somme des trois angles, par le cosinus de la différence entre

cette demi-somme et l'angle opposé au côté que l'on cherche, comme le carré du rayon est au carré du sinus de la moitié du côté cherché;

c'est-à-dire ;

$$\sin. B.\sin. C : \cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C).\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A) :: R^2 ; \sin.^2\tfrac{1}{2}a.$$

Démonstration. (*Fig. 7.*) Si l'on construit le triangle DEF, dont les trois côtés soient les supplémens respectifs des angles qui leur sont opposés dans le triangle sphérique quelconque ABC, et si l'on désigne par les lettres a', b', c', les côtés du triangle supplémentaire DEF, on aura dans ce dernier triangle dont les côtés sont connus (théorème précédent),

$$\sin. b'.\sin. c' : \sin.\tfrac{1}{2}s.\sin.(\tfrac{1}{2}s - a') :: R^2 : \cos.^2\tfrac{1}{2}F \ldots (1);$$

s exprime ici, comme dans le théorème cité, la somme des trois côtés a', b', c'.

Maintenant on se rappellera,

1.° Que le sinus d'un angle est égal à celui de son supplément;

2.° Que le sinus de la moitié d'un angle est égal au cosinus de la moitié de son supplément; et le cosinus de la moitié d'un angle est égal au sinus de la moitié de son supplément.

(*Fig. 8.*) On peut facilement se convaincre de cette seconde vérité, en consultant la figure 8, dans laquelle on a,

$$EI = \sin. DE = \sin.\tfrac{1}{2}ADE,$$
$$CO = \cos. EF = \cos.\tfrac{1}{2}EFB = \cos.\tfrac{1}{2}\text{supl.}\ ADE.$$

Or, le quadrilatère $EICO$ est un rectangle; car l'angle IEO est droit, puisqu'il a pour mesure une demi-circonférence ; et les angles I et O sont également droits, puisqu'ils sont formés par les cordes AE, BE, et par des rayons menés sur le milieu de ces cordes : donc on a,

$$IE = CO,$$

ou

$$\sin.\tfrac{1}{2}ADE = \cos.\tfrac{1}{2}\text{suppl.}\ ADE.$$

D'après ces remarques, si dans la proportion (1) on substitue à sin. b', sin. c', sin. $\frac{1}{2}s$, &c. les lignes trigonométriques correspondantes du supplément des arcs b', c', $\frac{1}{2}s$, &c., on la changera en celle-ci,

$$\sin. B.\sin. C : \cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C).\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A) :: R^2 : \sin.^2\tfrac{1}{2}a;$$

d'où

$$\sin.\tfrac{1}{2}a = R\sqrt{\left(\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C).\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin. B.\sin. C}\right)}.$$

116. Corollaire. (*Fig. 7.*) Si l'on applique le théorème VI au triangle supplémentaire DEF, on aura,

$$\sin. b'.\sin. c' : \sin.(\tfrac{1}{2}s - b').\sin.(\tfrac{1}{2}s - c') :: R^2 : \sin.^2 \tfrac{1}{2}F);$$

et, en observant les remarques précédentes, cette proportion devient,

$$\sin. B \sin. C : \cos. \tfrac{1}{2}(A + C - B).\cos. \tfrac{1}{2}(A + B - C) :: R^2 : \cos.^2 \tfrac{1}{2}a;$$

d'où l'on tire,

$$\cos. \tfrac{1}{2}a = R\sqrt{\left(\frac{\cos. \frac{1}{2}(A + C - B)\cos. \frac{1}{2}(A + B - C)}{\sin. B.\sin. C}\right)},$$

formule qui sert également à déterminer le côté d'un triangle sphérique dont on connaît les trois angles.

§. III.

Observations sur les deux Tableaux suivans.

117. La chose inconnue, c'est-à-dire, l'angle ou le côté qu'on cherche et qui forme le quatrième terme de chaque analogie, peut quelquefois équivaloir indifféremment à un angle aigu ou à son supplément; ce qui conduit alors à deux solutions. Pour lever toute incertitude à cet égard, je rapporterai quelques-uns des résultats exposés dans le chapitre I.er, aux numéros 28, 29, 30, 31; savoir, qu'en nommant p un arc quelconque moindre que 90°, et par conséquent 180 — p son supplément, on a

$$\sin. (180 - p) = \sin. p, \quad \text{tang.} (180 - p) = - \text{tang.} p,$$
$$\cos. (180 - p) = - \cos. p, \quad \text{cotang.} (180 - p) = - \text{cotang.} p.$$

Il suit de là qu'un angle aigu p, et son supplément 180 — p, ont le même sinus, tant pour la quantité que pour le signe; tandis que le cosinus, la tangente et la cotangente, qui conservent, pour ces deux angles, la même valeur absolue, diffèrent alors par les signes. D'après ce principe, si un élément est déterminé par son sinus seulement, il y aura deux valeurs de cet élément, et par conséquent deux triangles qui satisferont à la question; car le même sinus qui répond à un angle ou à un arc, répond également à son supplément: mais si le quatrième terme des analogies renfermées dans ces deux tableaux exprime un cosinus, une tangente ou une cotangente, alors on pourra décider, par le signe de la valeur de ces lignes, si l'élément qu'elles déterminent sera plus grand ou moindre que 90°: il sera plus petit,

si le signe de l'une de ces lignes trigonométriques est positif; il sera plus grand, si le signe est négatif.

En général, on écartera beaucoup de solutions inutiles ou fausses, en se rappelant,

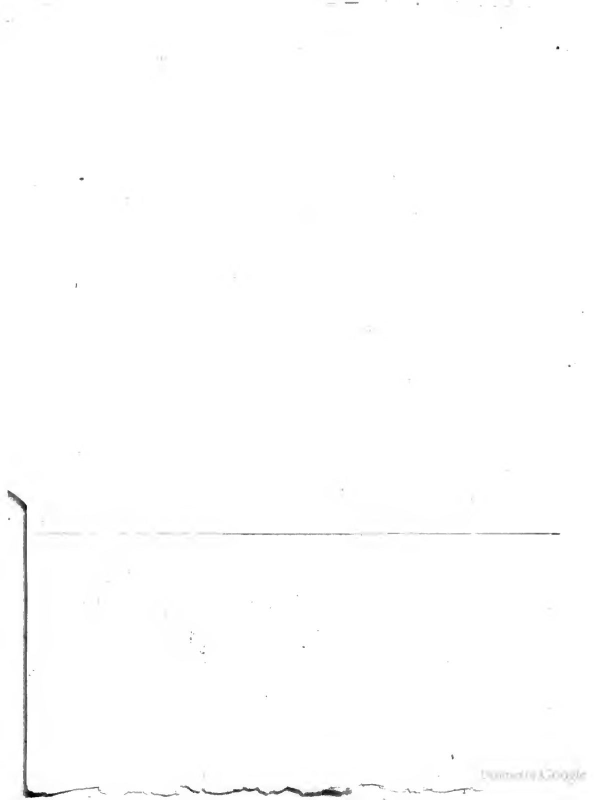
1.° Que dans un triangle sphérique quelconque, tout angle ou tout côté doit être plus petit que 180°;

2.° Que les plus grands angles sont opposés aux plus grands côtés, et réciproquement.

TABLEAU I.er,

Contenant les différens cas que présente la résolution des triangles sphériques rectangles.

CAS.	DONNÉES.	INCONNUES.	SOLUTION.	NUMÉROS des PROPOSITIONS.
1.	L'hypoténuse *a* et l'angle *B*.	Le côté opposé *b*.	*R* : sin. *B* :: sin. *a* : sin. *b*.	102, n.° 1.
2.	Mêmes données.	Le côté adjacent *c*.	*R* : cos. *B* :: tang. *a* : tang. *c*.	102, n.° 2.
3.	Mêmes données.	Le second angle *C*.	*R* : cos. *a* :: tang. *B* : cot. *C*.	111.
4.	L'hypoténuse *a* et le côté *c*.	Le second côté *b*.	Cos. *c* : cos. *a* :: *R* : cos. *b*.	105.
5.	Mêmes données.	L'angle opposé *C*.	Sin. *a* : sin. *c* :: *R* : sin. *C*.	102, n.° 1.
6.	Mêmes données.	L'angle adjacent *B*.	Tang. *a* : tang. *c* :: *R* : cos. *B*.	102, n.° 2.
7.	Le côté *c* et l'angle adjacent *B*.	Le second côté *b*.	*R* : sin. *c* :: tang. *B* : tang. *b*.	109.
8.	Mêmes données.	L'angle opposé *C*.	*R* : sin. *B* :: cos. *c* : cos. *C*.	107.
9.	Un côté *c* et l'angle adjacent *B*.	L'hypoténuse *a*.	Cos. *B* : *R* :: tang. *c* : tang. *a*.	102, n.° 2.
10.	Un côté *c* et l'angle opposé *C*.	Le second côté *b*.	Tang. *C* : tang. *c* :: *R* : sin. *b*.	109.
11.	Mêmes données.	L'angle adjacent *B*.	Cos. *c* : cos. *C* :: *R* : sin. *B*.	107.
12.	Mêmes données.	L'hypoténuse *a*.	Sin. *C* : sin. *c* :: *R* : sin. *a*.	102, n.° 1.
13.	Le côté *c* et le côté *b*.	L'hypoténuse *a*.	*R* : cos. *c* :: cos. *b* : cos. *a*.	105.
14.	Mêmes données.	L'angle *B*.	Sin. *c* : *R* :: tang. *b* : tang. *B*.	109.
15.	L'angle *B* et l'angle *C*.	Le côté *c*.	Sin. *B* : cos. *C* :: *R* : cos. *c*.	107.
16.	Mêmes données.	L'hypoténuse *a*.	Tang. *B* : cot. *C* :: *R* : cos. *a*.	111.



Contenant les différens cas que ngles sphériques quelconques.

CAS.	DONNÉES.	INCONNUES.	N.	NUMÉROS des PROPOSITIONS.
1.	Le côté a, Le côté b, L'angle A opposé au côté a.	L'angle B opposé à l'autre côté b.	: sin. B.	103.
2.	Mêmes données.	L'angle compris ACL	rpendiculaire sur l'arc AB, 3 sera égal à la somme *(fig. 3)* , BCD, selon que l'arc CD u triangle ACB. Il s'agit ACD par cette proportion, cot. ACD	
8.	L'angle A, L'angle B, Le côté b opposé à l'un des deux.	Le côté c adjace aux deux angles donn	roportion suivante, tang. AD; AD : sin. BD. en déduire c.	102, n.° 2. 110.
9.	Mêmes données.	Le côté a opposé l'un des deux ang donnés.	b : sin. a.	103.
10.	Mêmes données.	Le troisième angle	lifférence des angles ACD, CD. On calculera ces deux ntes, : cot. ACD, D : sin. BCD.	111. 108.
11.	Le côté c, Le côté a, Le côté b.	Un angle quelconq par exemple l'angle A	utre de ces deux formules, $\frac{c) \sin.(\frac{1}{2} s - b)}{n. b \sin. c}$), $\frac{\sin. (\frac{1}{2} s - a)}{n. b. \sin. c}$).	113. 114. *Nota.* Dans ces formules, s représente la somme des trois côtés a, b, c.
12.	L'angle A, L'angle B, L'angle C.	Un côté quelconq par exemple le côté a	ux formules suivantes, $\frac{\cos. (\frac{1}{2} S' - A)}{B \times \sin. C}$), $\frac{B) \times \cos.(\frac{1}{2} S' -}{. B. \sin. C}$	115. 116. *Nota.* Dans ces formules S' représente la somme des trois angles A, B, C.

Manuel de l'Ingénieur du Cadastre, pag

118. Appliquons quelques-unes des formules rassemblées dans ces deux tableaux à plusieurs exemples ; il suffira de ceux que nous allons rapporter, pour faire connaître comment on doit se conduire généralement quand on veut faire usage de ces analogies pour obtenir des résultats numériques.

EXEMPLES de la Résolution d'un Triangle rectangle.

I.er EXEMPLE. *(Fig. 4.)* Soit un triangle rectangle ABC, dans lequel on connaisse

$$\left.\begin{array}{ll} \text{l'hypoténuse } BC = a = & 45^\circ\ 30' \\ \text{l'angle } \quad B = & 36^\circ\ 25' \end{array}\right\}$$

On propose de calculer les autres parties de ce triangle ; savoir,

$$\left.\begin{array}{l} 1.^\circ \text{ le côté } AC = b, \\ 2.^\circ \text{ le côté } BA = c, \\ 3.^\circ \text{ l'angle } \quad C. \end{array}\right\}$$

1.° Le calcul du côté $AC = b$ dépend de la proportion rapportée au 1.er cas du tableau I.er

$$R : \sin.\ 36^\circ\ 25' :: \sin.\ 45^\circ\ 30' : \sin.\ b.$$

Type du calcul, log. sin. 36° 25′	=	9,7735327.
log. sin. 45° 30′	=	9,8532421.
		19,6267748.
log. R	=	10,
log. sin. b	=	9,6267748 ;

d'où $b = 25^\circ\ 3'\ 3'',266$ ou $154^\circ\ 56'\ 56'',733$.

2.° La détermination du côté $BA = c$ dépend de la proportion rapportée au 2.e cas du tableau I.er

$$R : \cos.\ 36^\circ\ 25' :: \text{tang.}\ 45^\circ\ 30' : \text{tang.}\ c.$$

Type du calcul, log. cos. 36° 25′	=	9,9056454.
log. tang. 45° 30′	=	10,0075803.
		19,9132257.
log. R	=	10,
log. tang. c	=	9,9132257 ;

d'où $c = 39^\circ\ 18'\ 49'',366$.

3.° La recherche de l'angle C dépend de la proportion rapportée au 3.e cas du tableau I.er

R : cos. 45° 30′ : : tang. 36° 25′ : cotang. C.

Type du calcul, log. cos. 45° 30′ = 9,8456618.
log. tang. 36° 25′ = 9,8678873.

19,7135491.
log. R = 10,

log. cot. C = 9,7135491;

d'où $C = 62°\ 39'\ 28'',383$.

II.e Exemple. Étant donné dans le même triangle rectangle BAC,

$BC = a = 45°\ 30'$
et $BA = c = 39°\ 18'\ 49'',366$,

on propose de calculer $AC = b$.

Le côté $AC = b$ dépend de la proportion rapportée au 4.e cas du tableau I.er

Cos. 39° 18′ 49′,366 : cos. 45° 30′ : : R : cos. b.

Type du calcul, log. cos. 45° 30′ = 9,8456618.
log. R = 10,

19,8456618.
log. cos. 39° 18′ 49″366 = 9,8885662.

log. cos. b = 9,9570956;

d'où $b = 25°\ 3'\ 3'',266$.

III.e Exemple. Étant donné les deux côtés

$BA = c = 39°\ 18'\ 49'',366$
$AC = b = 25°\ 3'\ 3'',266$,

on propose de calculer

1.° L'hypoténuse $BC = a$
2.° l'angle B.

1.°

1.° L'hypoténuse $BC = a$ dépend de la proportion rapportée au 13.e cas du tableau I.er,

R : cos. 39° 18′ 49″,366 :: cos. 25° 3′ 3″,266 : cos. a.

Type du calcul, log. cos. 39° 18′ 49″,366 = 9,8885662.
log. cos. 25° 3′ 3″,266 = 9,9570956.
19,8456618.
log. R = 10,
log. cos. a = 9,8456618;

d'où a = 45° 30′.

2.° L'angle B dépend de la proportion rapportée au 14.e cas du tableau I.er,

sin. 39° 18′ 49″,366 : R :: tang. 25° 3′ 3″,266 : tang. B.

Type du calcul, log. R = 10,
log. tang. 25° 3′ 3″,266 = 9,6696792.
19,6696792.
log. sin. 39° 18′ 49″,366 = 9,8017919.
log. tang. B = 9,8678873;

d'où B = 36° 25′.

IV.e Exemple. Étant donné les deux angles

B = 36° 25′
C = 62° 39′ 28″,383,

on propose de calculer l'hypoténuse $BC = a$.

L'hypoténuse BC dépend de la proportion rapportée au 16.e cas du tableau I.er,

tang. 36° 25′ : cot. 62° 39′ 28″,383 :: R : cos. a.

Type du calcul, log. cot. 62° 39′ 28″,383 = 9,7135491.
log. R = 10,
19,7135491.
log. tang. 36° 25′ = 9,8678873.
log. cos. a = 9,8456618;

d'où a = 45° 30′.

K

Il résulte de ces calculs, que les valeurs angulaires des six parties du triangle rectangle *ABC* sont,

l'angle $A = 90°$	le côté $a = 45° \ 30'$
$B = 36° \ 25'$	$b = 25° \ 3' \ 3'',266$
$C = 62° \ 39' \ 28'',383.$	$c = 39° \ 18' \ 49'',366.$

Exemples de la résolution d'un Triangle sphérique quelconque.

119. Les formules dont on fera usage dans les exemples suivans, se rapportent à celles du tableau II.

Ier Exemple. Connaissant dans le triangle sphérique *ABC* (*fig.10*),

1.° l'angle $A = 114° \ 7' \ 30'',14$,
2.° le côté $c = 41° \ 9' \ 45'',94$,
3.° le côté $b = 50° \ 5' \ 47'',15$,

déterminer les trois autres parties *B*, *C*, *a*.

1.° Pour obtenir le côté *a*, on aura recours aux analogies du 4.e cas. La première donne

$$R : \cos. 114° \ 7' \ 30'',14 :: \text{tang.} \ 50° \ 5' \ 47'',15 : \text{tang.} \ AD.$$

Type du calcul,

$$\begin{array}{lcl} \log. \cos. \ 114° \ 7' \ 30'',14 & = & 9,6114359. \\ \log. \text{tang.} \ 50° \ 5' \ 47'',15 & = & 10,0776713. \\ \hline & & 19,6891072. \\ \log. R & = & 10, \\ \hline \log. \text{tang.} \ AD & = & 9,6891072; \end{array}$$

d'où l'on obtient

$$AD = 26° \ 2' \ 53''29.$$

La seconde analogie donne, en observant que

$$BD = AB + AD,$$

$$\cos. 26° \ 2' \ 53'',29 : \cos. 67° \ 12' \ 39'',23 :: \cos. 50° \ 5' \ 47'',15 : \cos. a.$$

Type du calcul,

$$\begin{array}{lr} \log.\ \cos.\ 67^\circ\ 12'\ 39'',23 = & 9,5880927. \\ \log.\ \cos.\ 50^\circ\ \ 5'\ 47'',15 = & \underline{9,8071949.} \\ & 19,3952876. \\ \log.\ \cos.\ 26^\circ\ \ 2'\ 53'',29 = & \underline{9,9534820.} \\ \log.\ \cos.\ a \qquad = & 9,4418056; \end{array}$$

d'où $a = BC = 73^\circ\ 56'\ 39'',79$.

IIe Exemple. Dans ce même triangle ABC, calculer la valeur de l'angle C.

Pour cela, on fera usage des deux analogies du 2.e cas.

Par la première, on a

R : cos. $50^\circ\ 5'\ 47'',15$ :: tang. $114^\circ\ 7'\ 30'',14$: cot. ACD.

Type du calcul,

$$\begin{array}{lr} \log.\ \text{tang.}\ 114^\circ\ 7'\ 30'',14 = & 10,3488711. \\ \log.\ \cos.\ \ 50^\circ\ 5'\ 47'',15 = & \underline{9,8071949.} \\ & 20,1560660. \\ \log.\ R \qquad = & \underline{10,} \\ \log.\ \cot.\ ACD \qquad = & 10,1560660; \end{array}$$

d'où l'on déduit $ACD = 34^\circ\ 55'\ 11'',67$.

La seconde analogie donne

tang. $73^\circ\ 56'\ 39'',79$: tang. $50^\circ\ 5'\ 47'',15$ :: cos. $34^\circ\ 55'\ 11'',67$ :: cos. BCD.

Type du calcul,

$$\begin{array}{lr} \log.\ \text{tang.}\ 50^\circ\ \ 5'\ 47'',15 = & 10,0776713. \\ \log.\ \cos.\ 34^\circ\ 55'\ 11'',67 = & \underline{9,9137889.} \\ & 19,9914602. \\ \log.\ \text{tang.}\ 73^\circ\ 56'\ 39'',79 = & \underline{10,5409170.} \\ \log.\ \cos.\ BCD \qquad = & 9,4505432; \end{array}$$

d'où $BCD = 73^\circ\ 36'\ 32'',35$.

Et puisque l'angle $C = BCD - ACD$, on trouvera pour sa valeur,

$$C = 38^\circ\ 41'\ 20'',68.$$

III.e Exemple. Il reste encore à calculer l'angle B, pour connaître toutes les parties du triangle ABC.

L'analogie du premier cas y conduira. On a

$$\sin.\ 73^\circ\ 56'\ 39'',79 : \sin.\ 50^\circ\ 5'\ 47'',15 :: \sin.\ 114^\circ\ 7'\ 30'',14 : \sin.\ B.$$

Type du calcul,

$$
\begin{array}{lr}
\log.\ \sin.\ 50^\circ\ 5'\ 47'',15 = & 9,8848663. \\
\log.\ \sin.\ 114^\circ\ 7'\ 30'',14 = & \underline{9,9603070.} \\
 & 19,8451733. \\
\log.\ \sin.\ 73^\circ\ 56'\ 39'',79 = & \underline{9,9827206.} \\
\log.\ \sin.\ B \qquad\qquad = & 9,8624527;
\end{array}
$$

donc l'angle $B = 46^\circ\ 45'\ 50'',56$.

Il résulte de ces calculs que les six parties du triangle ABC ont les valeurs angulaires suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
A = 114^\circ\ 7'\ 30'',14. & a = 73^\circ\ 56'\ 39'',79. \\
B = 46^\circ\ 45'\ 50'',56. & b = 50^\circ\ 5'\ 47'',15. \\
C = 38^\circ\ 41'\ 20'',68. & c = 41^\circ\ 9'\ 45'',94.
\end{array}
$$

IV.e Exemple. Pour présenter une application des formules qui conduisent à l'un des côtés par la connaissance des trois angles, ou à l'un des angles par celle des trois côtés, nous choisirons les données dans les résultats ci-dessus.

Soient

$$
\left.
\begin{array}{l}
A = 114^\circ\ 7'\ 30'',14. \\
B = 46^\circ\ 45'\ 50'',56. \\
C = 38^\circ\ 41'\ 20'',68.
\end{array}
\right\}
$$

Proposons-nous d'obtenir le côté $b = A = AC$: on se servira de la première formule du 12.e cas, qui devient

$$\sin.\ 114^\circ\ 7'\ 30'',14 \times \sin.\ 38^\circ\ 41'\ 20'',68 : \cos.\ 99^\circ\ 47'\ 20'',69 \times \cos.\ 53^\circ\ 1'\ 30'',13 :: R^2 : \sin.^2 \tfrac{1}{2} b.$$

En effet,

$$\tfrac{1}{2} S = \tfrac{1}{2}(A + B + C) = 99^\circ\ 47'\ 20'',69.$$

Type du calcul,

$$\log.\ \cos.\ 99^\circ\ 47'\ 20'',69 = 9,2305043.$$
$$\log.\ \cos.\ 53^\circ\ 1'\ 30'',13 = 9,7792109.$$
$$\log.\ R^2 = 20,$$
$$39,0097152.$$

$$\log.\ \sin.\ 114^\circ\ 7'\ 30'',14 = 9,9603070.$$
$$\log.\ \sin.\ 38^\circ\ 41'\ 20'',68 = 9,7959453.$$
$$19,7562523.$$

Retranchant cette somme de la précédente, il vient

$$\log.\ \sin.^2\ \tfrac{1}{2}\ b = 19,2534629;$$

d'où

$$\log.\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\ b = 9,6267314.$$

Et par conséquent,

$$\tfrac{1}{2}\ b = 25^\circ\ 2'\ 53'',64;$$

d'où

$$b = 50^\circ\ 5'\ 47'',28.$$

Ce résultat surpasse de 0",13 la valeur de *b*. On doit attribuer cette différence aux légères inexactitudes qui proviennent de l'emploi des logarithmes, dont le dernier chiffre décimal n'est jamais rigoureux; et quoique l'on ait apporté dans ces exemples les mêmes corrections observées pour le calcul de ceux qui terminent la trigonométrie rectiligne (n.os 85 et suivans), néanmoins l'indécision des derniers chiffres décimaux introduit de petites erreurs, qui deviennent d'autant plus sensibles à la fin du calcul, que ces corrections ont porté sur un plus grand nombre de termes.

§. IV.

120. Dans toutes les formules précédentes, ainsi que dans les exemples qui leur ont servi d'application, on a regardé comme égal à l'unité, le rayon de la sphère sur laquelle les triangles étaient supposés décrits. Si ce rayon n'est pas égal à l'unité, et que l'on veuille déterminer la longueur absolue des côtés du triangle sphérique dont on connaît la valeur angulaire, on y parviendra facilement, en se rappelant que les longueurs des arcs sont proportionnelles aux nombres des degrés qui les composent.

Soit donc r le rayon de la sphère ; $2\pi r$ sera l'expression de la longueur de l'un de ses grands cercles. Si a représente le nombre des degrés que renferme un côté du triangle sphérique, la longueur de ce côté s'obtiendra par la proportion suivante :

$$360^\circ : a^\circ :: 2\pi r : x = \frac{2\pi}{360} \times r\, a^\circ ;$$

ou traduisant les degrés en secondes, et représentant par n le nombre des secondes contenues dans a°, on a

$$1296000'' : n'' :: 2\pi r : x = \frac{2\pi}{1296000} \cdot n . r \ldots\ldots (1).$$

Substituant au lieu de π sa valeur $\frac{355}{113}$, ou, plus exactement, 3,1415926, il viendra

$$x = \frac{6,2831852}{1296000} \cdot n . r.$$

Les logarithmes peuvent faciliter le calcul de ce terme, et l'on obtient, en les employant,

$$\log. x = \log. r + \log. n - 5,3144251 \ldots\ldots (2).$$

Ce dernier nombre est constant ; et le logarithme final auquel cette formule conduit, appartient à un nombre composé d'autant d'unités abstraites que l'unité linéaire, par laquelle on a exprimé le rayon de la sphère, peut être portée de fois sur l'étendue du côté de n''.

Réciproquement, si l'on connaît la longueur absolue des côtés d'un triangle sphérique, et que l'on se propose de calculer leurs valeurs angulaires, afin de pouvoir appliquer à ce triangle les formules précédentes, on pourra déduire ces valeurs de la même proportion (1), dans laquelle il faut alors regarder le terme x comme connu, et prendre pour l'objet de la recherche le terme n''. Il vient

$$n'' = \frac{1296000}{2\pi} \times \frac{x}{r},$$

ou, en faisant usage des logarithmes,

$$\log. n'' = 5,3144251 + \log. x - \log. r \ldots\ldots (3).$$

Ce logarithme appartient à un nombre abstrait égal à celui des secondes, qui mesurent le côté du triangle sphérique. Il est facile ensuite de convertir ce nombre de secondes en minutes et degrés.

Si l'on applique le résultat (2) aux deux triangles dont on vient de calculer toutes les parties angulaires, en supposant $r = 100$ mètres, on trouvera pour le triangle rectangle,

$$a = 79^m,4125,$$
$$b = 43^m,7221,$$
$$c = 68^m,6154;$$

et pour le triangle obliquangle,

$$a = 129^m,0573,$$
$$b = 87^m,4348,$$
$$c = 71^m,8426.$$

De même, si ces dernières valeurs de a, b, c, étaient connues, et que l'on voulût en déduire les valeurs angulaires de ces mêmes côtés, la formule (3) reproduirait les résultats primitifs; savoir, pour le triangle rectangle,

$$a = 45° \; 30',$$
$$b = 25° \; 3' \; 3'',266,$$
$$c = 39° \; 18' \; 49'',366;$$

pour le triangle obliquangle,

$$a = 73° \; 56' \; 39'',79,$$
$$b = 50° \; 5' \; 47'',15,$$
$$c = 41° \; 9' \; 45'',94.$$

121. THÉORÈME IX. *La surface d'un triangle sphérique est à la surface de la sphère sur laquelle il est décrit, comme l'excès des trois angles de ce triangle sur deux angles droits est à huit angles droits.*

C'est-à-dire *(fig. 9)* qu'en appelant S la surface de la sphère, S' celle du triangle sphérique ABC, D l'angle droit, et A, B, C les trois angles du triangle sphérique, on a cette proportion,

$$S' : S :: A + B + C - 2D : 8D.$$

Démonstration. Soit ABC le triangle sphérique qu'il s'agit de mesurer. On décrira les circonférences entières, dont les côtés AB, AC, BC, sont les arcs respectifs, et on réunira leurs points d'intersection par les diamètres AD, BE, CF. On voit, à l'aide de cette construction, que l'hémisphère $ABDEC$ est la somme des triangles sphériques ABC,

BCD, CDE, ACE. Or, la géométrie enseigne que la surface d'une sphère s'estime en multipliant son diamètre par la circonférence de l'un de ses grands cercles. Si, d'une autre part, on parvient à découvrir une expression de la somme de ces quatre triangles, et que cette expression soit telle, que la surface ABC, dont on suppose connue chacune des six parties, en forme un terme distinct, on pourra égaler cette somme à la formule qui donne l'aire de la sphère, et déduire de cette équation la valeur du terme ABC.

Pour cela, on considérera la portion de la surface sphérique $ABDCA$ comprise entre les deux demi-circonférences ABD, ACD. Si l'on conçoit pour un moment qu'elles coïncident, puisque la demi-circonférence ACD tourne autour du diamètre AD, tandis que la première reste immobile, il est facile de remarquer que quand le plan ACD sera perpendiculaire, par exemple, sur le plan ABD, auquel cas l'angle A sera droit et mesuré par le quart d'une circonférence, la portion de surface sphérique $ABCD$ sera aussi le quart de la sphère entière ; et généralement, que le rapport de la mesure de quatre droits, ou une circonférence à l'angle A, est toujours égal à celui de la surface de la sphère, à l'espace sphérique terminé par les deux circonférences ABD, ACD. Cette remarque, dont on peut lire la démonstration dans le 7.ᵉ livre de la Géométrie de M. *Legendre*, fournit la proportion suivante :

$$s : S :: A : 4D; \text{ d'où } s = \frac{A}{4D} . S.$$

s représente la surface de l'espace $ABDCA$.

Appliquant les mêmes considérations aux espaces sphériques

$$\left. \begin{array}{l} BAECB = s', \\ CDFEC = s'', \end{array} \right\}$$

on aura

$$s' : S :: B : 4D; \text{ d'où } s' = \frac{B}{4D} . S,$$

$$s'' : S :: C : 4D; \quad s'' = \frac{C}{4D} . S.$$

Ajoutant les membres de ces trois égalités, il vient,

$$(1) \quad s + s' + s'' = \frac{A + B + C}{4D} . S.$$

On

On peut voir, sur la figure 9, que

$$s = ABC + BCD,$$
$$s' = ABC + CAE,$$
$$s'' = CDE + DEF;$$

d'où

(2) $s + s' + s'' = ABC + (ABC + BCD + CDE + ACE) + DEF,$

observant que la somme des termes renfermés dans la parenthèse compose l'hémisphère $ABDEC = \frac{1}{2} S$, et que les triangles sphériques DEF, ABC, sont égaux.

En effet, ces deux triangles sont équilatéraux entre eux ; car si des demi-cir conférences égales BDE, ABD on retranche l'arc commun BD, il reste

$$AB = DE.$$

De même, si des demi-circonférences égales BCE, CEF on retranche l'arc commun CE, on a

$$BC = EF.$$

Enfin, ôtant l'arc CD des demi-circonférences ACD, CDF, il reste

$$DF = AC.$$

Donc les triangles ABC, DEF, sont égaux. (*Legendre*, 7.e livre, théorème XIV.)

Égalant les seconds membres des équations (1) et (2), après avoir substitué dans la deuxième le résultat de ces dernières observations, on obtiendra

$$2\,ABC = \left(\frac{A + B + C}{4D} - \frac{1}{2}\right) . S,$$

ou

$$\frac{ABC}{S} = \frac{A + B + C - 2D}{8D},$$

ou enfin

$$S' = ABC : S :: A + B + C - 2D : 8D.$$

122. Corollaire. Si dans cette proportion on met pour S sa valeur cir. $R \times 2R$, ou $4D \times 2R$, on aura

$$S' : 4D \times 2R :: A + B + C - 2D : 8D.$$

L

Supprimant dans les deux conséquens le facteur commun 4, elle devient

$$S' : D \times 2R :: A + B + C - 2D : 2D,$$

ou

$$S' : \tfrac{1}{4} S :: A + B + C - 2D : 2D.$$

Appliquant à cette dernière proportion ce principe, que la somme des deux termes du premier rapport est au conséquent de ce rapport, comme la somme des deux termes du second rapport est à son conséquent, on obtient

$$S' + \tfrac{1}{4} S : \tfrac{1}{4} S :: A + B + C : 2D.$$

On a évidemment $S' + \frac{1}{4} S > \frac{1}{4} S$; donc on doit avoir aussi $A + B + C > 2D$; d'où l'on peut conclure que la somme des trois angles d'un triangle sphérique est toujours supérieure à deux angles droits.

On peut obtenir aussi une valeur pour la limite supérieure de la somme des trois angles d'un triangle sphérique quelconque ABC. A cet effet, on construira (*fig. 7*) le triangle DEF supplémentaire de ABC, et l'on a (n.° 99),

$$A + DE = 180°,$$
$$B + DF = 180°,$$
$$C + EF = 180°.$$

Additionnant ces équations, elles donnent

$$(A + B + C) + (DE + DF + EF) = 3 \times 180°,$$

ou

$$A + B + C = 540° - (DE + DF + EF);$$

d'où l'on peut conclure que la somme des trois angles d'un triangle sphérique quelconque ABC est toujours moindre que 540°, ou trois fois 180°.

123. Pour appliquer le théorème précédent à des exemples numériques, on mettra la proportion sous cette forme :

$$S' = ABC : 8D \times R :: A + B + C - 2D : 8D;$$

d'où

$$ABC = S' = R(A + B + C - 2D) \ldots\ldots (1).$$

Lorsque le rayon de la sphère est pris pour unité, cette formule se réduit à

$$S' = A + B + C - 2D.$$

Si l'on veut rechercher la surface du triangle sphérique rectangle ABC dont on vient de calculer les diverses parties, on fera dans la formule (1),

$$\left.\begin{array}{l} R = 100^{m}, \\ A = 90^{\circ}, \\ B = 36^{\circ}\ 25', \\ C = 62^{\circ}\ 39'\ 28'',383\,; \end{array}\right\}$$

donc

$$A + B + C - 2D = 9^{\circ}\ 4'\ 28'',383 = 32668'',383\,;$$

par conséquent,

$$S' = 100^{m} \times 32668'',383.$$

Convertissant ce nombre de secondes en mètres par la formule (2) de l'article 120, on trouvera pour le logarithme du nombre de mètres 1,1997025; d'où

$$\log.\ S' = 2 + 1,1997025 = 3,1997025,$$

et

$$S' = 1583^{m.\ c.},99.$$

Si l'on applique la formule au calcul de la surface du triangle sphérique obliquangle ABC, en supposant également qu'il est décrit sur une sphère de 100 mètres de rayon, on trouvera

$$S' = ABC = 100^{m}\ (199^{\circ}\ 34'\ 41'',38 - 180^{\circ})$$

ou

$$S' = 100^{m}\ (19^{\circ}\ 34'\ 41'',38).$$

Convertissant le second facteur en mètres, et appliquant les logarithmes, il vient

$$\log.\ S' = \log.\ 100 + 1,5336493,$$

ou

$$\log.\ S' = 3,5336493.$$

Ce logarithme est celui du nombre 3417,0338; par conséquent,

$$\text{surf. } ABC = S' = 3417^{m.\ c.},0338.$$

§. V.

124. Dans le chapitre précédent, n.° 75, on a exposé avec des détails suffisans le calcul des lignes trigonométriques; je n'ajouterais donc pas ici le développement en série du sinus et du cosinus d'un arc, si ces formules ne devenaient nécessaires pour la démonstration du théorème suivant, qui établit un principe important dans les opérations géodésiques.

Pour parvenir à ces formules, je rappellerai qu'en désignant par (p) un arc quelconque pris sur un cercle dont le rayon est 1, on a, entre son sinus et son cosinus, l'équation

$$\sin.^2 p + \cos.^2 p = 1 \ldots. \ (\text{n.}^\circ\ 31),$$

que l'on peut écrire sous cette forme,

$$[\cos. p + \sqrt{(-1)} \sin. p] [\cos. p - \sqrt{(-1)} \sin. p] = 1 \ldots (1).$$

De même, pour un second arc (q), on a

$$[\cos. q + \sqrt{(-1)} \sin. q] [\cos. q - \sqrt{(-1)} \sin. q] = 1 \ldots (2).$$

Multipliant les deux équations (1) et (2), il vient pour produit

$$[\cos. p . \cos. q - \sin. p . \sin. q + (\cos. p \sin. q + \sin. p \cos. q) \sqrt{(-1)}] + [\cos. p . \cos. q - \sin. p . \sin. q - (\sin. q \cos. p + \sin. p \cos. q) \sqrt{(-1)}] = 1.$$

Mais il a été démontré (n.° 76) que

$$\sin. p . \cos. q + \sin. q . \cos. p = \sin. (p + q),$$
$$\cos. p . \cos. q - \sin. p . \sin. q = \cos. (p + q).$$

Substituant ces valeurs dans la dernière équation, elle devient

$$\{\cos. (p + q) + [\sin. (p + q)] \sqrt{(-1)}\} \{\cos. (p + q) - [\sin. (p + q)] \sqrt{(-1)}\} = 1.$$

On observera que les deux facteurs de ce résultat ne diffèrent que par le signe de leurs seconds termes; que le premier de ces facteurs exprime le produit des deux premiers facteurs des équations (1) et (2), et que le second est le produit des deux autres. D'après ces considérations, on peut présenter la combinaison de la dernière équation, avec les équations primitives (1), (2), sous cette forme abrégée,

$$[\cos. p \pm \sin. p \sqrt{(-1)}] [\cos. q \pm \sin. q \sqrt{(-1)}] = \cos. (p + q) \pm \sin. (p + q) \sqrt{(-1)}] \ldots\ldots (3).$$

On peut déduire, par une semblable analyse,

$$[\cos. (p + q) \pm \sin. (p + q) \sqrt{(-1)}] [\cos. r + \sin. r \sqrt{(-1)} = [\cos. (p + q + r) \pm \sin. (p + q + r) \sqrt{-1}] \ldots (4);$$

et ainsi de suite.

Si dans les équations (3), (4), &c. on fait $p = q$, $p = q = r$, &c.,

et si l'on remarque que le premier facteur de l'équation (4) peut être remplacé par le premier membre de l'équation (3), on obtient

$$\left.\begin{array}{l}[\cos. p \pm \sin. p\sqrt{(-1)}]^2 = \cos. 2p \pm \sin. 2p\sqrt{(-1)}\\ [\cos. p \pm \sin. p\sqrt{(-1)}]^3 = \cos. 3p \pm \sin. 3p\sqrt{(-1)}\end{array}\right\} (5);$$

d'où l'on conclura généralement,

$$[\cos. p \pm \sin. p\sqrt{(-1)}]^n = \cos. np \pm \sin. np\sqrt{(-1)},$$

ou, à cause du double signe,

$$\cos. np + \sin. np\sqrt{(-1)} = [\cos. p + \sin. p\sqrt{(-1)}]^n$$
$$\cos. np - \sin. np\sqrt{(-1)} = [\cos. p - \sin. p\sqrt{(-1)}]^n.$$

Ajoutant ces deux équations, on en tire, pour valeur de cos. np,

$$\cos. np = \frac{[\cos. p + \sin. p\sqrt{(-1)}]^n + [\cos. p - \sin. p\sqrt{(-1)}]^n}{2};$$

puis, retranchant la seconde de la première, on a pour sin. np,

$$\sin. np = \frac{[\cos. p + \sin. p\sqrt{(-1)}]^n - [\cos. p - \sin. p\sqrt{(-1)}]^n}{2 . \sqrt{(-1)}}.$$

Développant en série, par la formule de *Newton*, la puissance n des deux binomes cos. $p \pm$ sin. $p\sqrt{(-1)}$, on obtiendra

$$\begin{array}{l}[\cos. p + \sin. p\sqrt{(-1)}]^n = (\cos. p)^n + n\sqrt{(-1)}. \sin. p(\cos. p)^{n-1}\\ \quad - n . \frac{n-1}{2} . (\sin. p)^2 (\cos. p)^{n-2} - n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}\sqrt{(-1)}.\\ \quad (\sin. p)^3 (\cos. p)^{n-3} + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . (\sin. p)^4 (\cos. p)^{n-4}\\ \quad + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . \frac{n-4}{5} . \sqrt{(-1)}(\sin. p)^5 (\cos. p)^{n-5}\\ \quad - n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . \frac{n-4}{5}\, \frac{n-5}{6} . (\sin. p)^6 (\cos. p)^{n-6} - \&c\ldots\end{array}$$

$$\begin{array}{l}[\cos. p - \sin. p\sqrt{(-1)}]^n = (\cos. p)^n - n\sqrt{(-1)} \sin. p(\cos. p)^{n-1}\\ \quad - n . \frac{n-1}{2} . (\sin. p)^2 (\cos. p)^{n-2} + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}\sqrt{(-1)}\\ \quad (\sin. p)^3 (\cos. p)^{n-3} + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . (\sin. p)^4 (\cos. p)^{n-4}\\ \quad - n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . \frac{n-4}{5} . \sqrt{(-1)}(\sin. p)^5 (\cos. p)^{n-5}\\ \quad - n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . \frac{n-4}{5} . \frac{n-5}{6}(\sin. p)^6 (\cos. p)^{n-6} + \&c\ldots\end{array}$$

Prenant la moitié de la somme de ces deux séries, on aura le développement de cosinus $n\,p$; puis retranchant la seconde de la première, et divisant la différence par $2\sqrt{(-1)}$, on aura celui de sinus $n\,p$. Ces opérations donnent

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.\, n\,p = (\cos.\, p)^{n} - n \,.\, \frac{n-1}{2}\, (\sin.\, p)^{2}\, (\cos.\, p)^{n-2} \\
\quad + n \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3} \,.\, \frac{n-3}{4}\, (\sin.\, p)^{4}\, (\cos.\, p)^{n-4} \\
\quad - n \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3} \,.\, \frac{n-3}{4} \,.\, \frac{n-4}{5} \,.\, \frac{n-5}{6} \,.\, (\sin. p)^{6} (\cos. p)^{n-6} + \&c.... \\
\sin.\, n\,p = n \,.\, \sin. p\, (\cos.\, p)^{n-1} - n \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3} (\sin. p)^{3} (\cos. p)^{n-3} \\
\quad + n \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3} \,.\, \frac{n-3}{4} \,.\, \frac{n-4}{5} \,.\, (\sin. p)^{5} (\cos. p)^{n-5} - \&c....
\end{array}\right\} \ldots(6).$$

Supposons maintenant que l'arc p soit infiniment petit, de manière que l'on puisse, sans erreur, prendre la longueur de cet arc pour celle de son sinus, et le rayon pour la longueur de son cosinus; soit aussi le facteur n infiniment grand, afin que $n\,p$ ait une valeur finie, alors $\sin.\, p = p$; $\cos.\, p = 1$; $n\,p = a$; $p = \frac{a}{n}$.

Substituant ces valeurs dans les équations (6), en remarquant que les termes $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c. se réduisent chacun à n, à cause de n infiniment grand, elles deviennent

$$\left.\begin{array}{l}
\cos.\, a = 1 - \frac{a^{2}}{1.2} + \frac{a^{4}}{1.2.3.4} - \frac{a^{6}}{1.2.3.4.5.6} + \&c.... \\
\sin.\, a = a - \frac{a^{3}}{1.2.3} + \frac{a^{5}}{1.2.3.4.5} - \frac{a^{7}}{1.2.3.4.5.6.7} - \&c....
\end{array}\right\} (7).$$

Pour appliquer ces formules, nous rappellerons que l'arc (a) peut toujours être supposé moindre que 90° (n.° 77, IIe PRINCIPE). Soit donc $\frac{t}{s}$ le rapport de l'arc (a) à 90°, on en déduit

$$a = \frac{t}{s} \,.\, 90^{\circ} = \frac{t}{s} \,.\, \frac{180^{\circ}}{2}.$$

On a vu (n.° 80) que la longueur de la demi-circonférence, ou de l'arc de 180° dans un cercle dont le rayon est 1, a pour valeur

$$3{,}14159\ 26536;$$

donc

$$a = \frac{t}{s} \,.\, 1{,}57079\ 63268.$$

Calculant les valeurs de a^2, a^4, a^6, &c.; a^3, a^5, a^7, &c. pour les substituer dans les formules (7), on aura

$$\frac{a^2}{2} = \left(\frac{t}{s}\right)^2 \times 1{,}2337005501\,,$$

$$\frac{a^3}{2.3} = \left(\frac{t}{s}\right)^3 \times 0{,}6459640975\,,$$

$$\frac{a^4}{2.3.4} = \left(\frac{t}{s}\right)^4 \times 0{,}2536695079\,,$$

$$\frac{a^5}{2.3.4.5} = \left(\frac{t}{s}\right)^5 \times 0{,}0796926262\,,$$

$$\frac{a^6}{2.3.4.5.6} = \left(\frac{t}{s}\right)^6 \times 0{,}0208634807\,,$$

$$\frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} = \left(\frac{t}{s}\right)^7 \times 0{,}0046817541\,, \text{ \&c....}$$

Ces différens termes sont très-convergens, lorsque la fraction $\frac{t}{s}$ est petite. Or, puisque cos. a = sin. $(90° - a)$, on obtiendra la valeur du sinus de tous les angles jusqu'à 90°, en faisant au plus $a = 45°$ dans les formules (7); d'où il suit que la fraction $\frac{t}{s}$ sera toujours moindre que $\frac{1}{2}$.

Cherchons le sinus et le cosinus de l'angle de 40°; on a, dans ce cas, $\frac{t}{s} = \frac{4}{9}$. Substituant ces valeurs dans le tableau ci-dessus, on a

cos. $40° = 1 - 0{,}2436939358 + 0{,}0098977896 - 0{,}0001608021$
$= 0{,}7660430517$;

sin. $40° = 0{,}6981317008 - 0{,}0567101539 + 0{,}0013819920$
$- 0{,}0000160373 = 0{,}6427875016$.

Ces résultats, qui expriment le rapport du sinus et du cosinus de 40° au rayon pris pour unité, sont conformes à ceux rapportés au n.° 81. On calculerait leurs logarithmes comme il a été expliqué n.° 83.

125. THÉORÈME X. *Étant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère sur laquelle il est décrit; si l'on retranche de chacun de ses angles le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles, ainsi diminués, pourront être pris pour les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique.*

On doit à M. *Legendre* ce théorème remarquable, qui réduit la résolution des triangles sphériques *très*-peu courbes, à celle des triangles tectilignes. En voici la démonstration telle qu'il l'a publiée dans ses Élémens de géométrie :

Démonstration. Soient A, B, C, les angles du triangle sphérique que l'on considère, et a, b, c la valeur angulaire des côtés respectivement opposés ; soit aussi exprimé par r le rayon de la sphère sur laquelle ce triangle est tracé.

Si l'on construit, sur une sphère dont le rayon soit 1, un triangle $A' B' C'$ dont les angles soient égaux à ceux du triangle proposé, ces deux triangles sphériques seront semblables (*Legendre*, liv. 7, Prop. XVIII), et leurs côtés homologues proportionnels aux rayons des sphères. Représentant par a', b', c' les côtés de ce second triangle, on a, par conséquent,

$$a : a' :: r : 1 ;$$

d'où

$$a' = \frac{a}{r},$$

On obtiendrait de même $b' = \frac{b}{r}$; $c' = \frac{c}{r}$.

Cette construction étant conçue, écrivons l'équation suivante,

$$\cos. A' = \frac{\cos. a' - \cos. b' \cos. c'}{\sin. b' . \sin. c'} \ldots . (1),$$

qui exprime une relation entre les trois côtés d'un triangle sphérique et l'un de ses angles, et qui sert de fondement à toute la trigonométrie sphérique. Cette équation se démontre facilement par la seule considération des deux triangles rectilignes MNC, MON (fig. 1), dont le premier est formé par les tangentes des arcs a, b, et la ligne mn qui joint leurs extrémités ; et le second, par cette même ligne, et les sécantes mo, no de ces arcs. En effet, les deux tangentes forment entre elles l'angle C compris entre les arcs a, b ; et les deux sécantes font au centre (o) un angle qui est mesuré par le côté c du triangle sphérique. Ainsi, faisant, pour abréger, $MN = m$, le triangle MNC donnera (n.° 43),

$$m^2 = \text{tang. } a^2 + \text{tang. } b^2 - 2 \text{ tang. } a \text{ . tang. } b \cos. C.$$

On aura de même dans le triangle MON,

$$m^2 = \text{séc. } a^2 + \text{séc. } b^2 - 2 \text{ séc. } a \text{ séc. } b \cos. c,$$

Égalant

Égalant ces deux valeurs de m^2, il vient

$$\text{tang.}\, a^2 + \text{tang.}\, b^2 - 2\,\text{tang.}\, a\,\text{tang.}\, b\cos. C = \text{séc.}\, a^2 + \text{séc.}\, b^2 - 2\,\text{séc.}\, a\,.\,\text{séc.}\, b\,.\cos.\, c,$$

ou

$$2\,\text{séc.}\, a\,.\,\text{séc.}\, b\,.\cos.\, c = (\text{séc.}\, a^2 - \text{tang.}\, a^2) + (\text{séc.}\, b^2 - \text{tang.}\, b^2) + 2\,\text{tang.}\, a\,.\,\text{tang.}\, b\cos. C;$$

et comme la sécante et la tangente d'un arc forment, avec le rayon, un triangle rectangle, on a entre ces lignes cette équation,

$$\text{séc.}\, a^2 - \text{tang.}\, a^2 = 1;$$

de même

$$\text{séc.}\, b^2 - \text{tang.}\, b^2 = 1.$$

Substituant ces résultats dans la dernière équation, et divisant ses deux membres par 2, il vient,

$$\text{séc.}\, a\ \text{séc.}\, b\cos.\, c = 1 + \text{tang.}\, a\ \text{tang.}\, b\cos.\, C.$$

Mettant enfin pour séc. a, séc. b, tang. a, tang. b, leurs valeurs $\frac{r}{\cos.\, a}$, $\frac{1}{\cos.\, b}$, $\frac{\sin.\, a}{\cos.\, a}$, $\frac{\sin.\, b}{\cos.\, b}$ (n.° 31), il vient

$$\frac{1}{\cos.\, a}\cdot\frac{1}{\cos.\, b}\,.\cos.\, c = 1 + \frac{\sin.\, a\,\sin.\, b}{\cos.\, a\,\cos.\, b}\cos.\, C.$$

Multipliant les deux membres par cos. a, cos. b, on obtient

$$\cos.\, C = \frac{\cos.\, c - \cos.\, a\cos.\, b}{\sin.\, a\,.\,\sin.\, b};$$

équation qui est identique avec l'équation (1), en écrivant A' au lieu de C, et a', c', b', à la place des côtés c, a, b.

Maintenant, si l'on observe que par hypothèse le rayon de la sphère est supposé très-grand, et que, par conséquent, on peut admettre, sans erreur sensible,

$$\left.\begin{aligned}
\cos.\, a' &= 1 - \frac{a'^2}{2} + \frac{a'^4}{2\cdot 3\cdot 4}\\
\cos.\, b' &= 1 - \frac{b'^2}{2} + \frac{b'^4}{2\cdot 3\cdot 4}\\
\cos.\, c' &= 1 - \frac{c'^2}{2} + \frac{c'^4}{2\cdot 3\cdot 4}\\
\sin.\, b' &= b' - \frac{b'^3}{2\cdot 3}\\
\sin.\, c' &= c' - \frac{c'^3}{2\cdot 3}
\end{aligned}\right\}\ (\text{n.° } 124).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), et négligeant de comprendre les termes qui seraient composés de plus de quatre facteurs en a', b', c', on obtient

$$\cos. A' = \frac{3(c'^2 + b'^2 - a'^2) + \frac{1}{4}(a'^4 - b'^4 - c'^4) - \frac{3}{2} b'^2 c'^2}{b' c' [6 - (b'^2 + c'^2)]}.$$

Multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par $\frac{[6 + (b'^2 + c'^2)]}{6}$; continuant d'omettre dans les produits partiels les termes qui contiendraient plus de quatre dimensions, et réduisant, on obtient

$$\cos. A' = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2 b' c'} + \frac{a'^4 + b'^4 + c'^4 - 2 a'^2 b'^2 - 2 a'^2 c'^2 - 2 b'^2 c'^2}{24 b' c'}.$$

Mettant pour a', b', c', leurs valeurs $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, on aura

$$\text{co.} A' = \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2 a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2}{24 b c r^2} \quad (2).$$

Cela posé, construisons un triangle rectiligne dont les trois côtés soient respectivement égaux à la longueur des arcs a, b, c du triangle ABC, A'' sera l'angle opposé au côté a dans ce triangle rectiligne. Or on a (n.° 43),

$$\cos. A'' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 bc}.$$

Élevant au carré les deux membres de cette équation, et écrivant $1 - \sin.^2 A''$, au lieu de $\cos.^2 A''$, on aura

$$-4 b^2 c^2 \sin.^2 A'' = a^4 + b^4 + c^4 - 2 a^2 b^2 - 2 a^2 c^2 - 2 b^2 c^2.$$

Par le moyen de ces deux résultats, on peut donner à l'équation (2) la forme suivante :

$$\cos. A = \cos. A'' - \frac{bc}{6 r^2} \sin.^2 A'' \ldots\ldots (3)$$

Appelons d la différence qui peut exister entre l'angle A du triangle sphérique et l'angle correspondant A'' du triangle rectiligne qui a les mêmes côtés, on a

$$A - A'' = d\text{; d'où } A = A'' + d, \text{ et (n.° 76)}$$
$$\cos. A = \cos. A'' \cos. d - \sin. A'' \sin. d.$$

Substituant pour cos. d et sin. d le premier terme seulement des séries

qui expriment leurs valeurs (n.° 124), afin de ne pas employer des facteurs de quatre dimensions, on obtient

$$\cos. A = \cos. A'' - d \sin. A''.$$

Comparant cette valeur de cos. A avec celle de l'équation (3), on en déduit

$$d = \frac{bc}{6r^2} \sin. A''.$$

On voit par-là que d est du second ordre, par rapport à $\frac{b}{r}$ et à $\frac{c}{r}$; et puisque les termes que l'on a négligés dans le développement de sin. d et cos. d sont égaux ou supérieurs au carré de d, il s'ensuit que la valeur de cet arc est exact, aux quantités près, du quatrième ordre.

De l'équation $A = A'' + d$, on déduit, par ces considérations,

$$A = A'' + \frac{bc}{6r^2} \sin. A''.$$

Si, pour estimer la surface du triangle rectiligne $A''\,B''\,C''$, on choisit le côté c pour base, et qu'on appelle h la perpendiculaire abaissée de l'angle C sur c, on aura $\frac{1}{2}\,c\,h$ pour l'expression de l'aire du triangle. D'une autre part, la ligne h fait partie d'un triangle rectangle, dont l'angle opposé est A'', et dans lequel le côté b est l'hypoténuse. Appliquant à ce triangle rectangle le principe du n.° 35, il vient

$$1 : b :: \sin. A'' : h;$$

d'où

$$h = b \sin. A'',$$

et

$$\tfrac{1}{2}\,c\,h = \tfrac{1}{2}\,b\,c \sin. A''.$$

Si l'on représente par s cette dernière expression, qui peut également représenter la surface du triangle sphérique $A\,B\,C$, laquelle ne diffère pas sensiblement de celle du triangle $A''\,B''\,C''$, on aura

$$A'' = A - \frac{s}{3r^2};$$

de même

$$B'' = B - \frac{s}{3r^2},$$

$$C'' = C - \frac{s}{3r^2}.$$

Additionnant ces trois égalités, et observant que la somme des trois

angles A'', B'', C'' doit valoir 180°, on a

$$180° = (A + B + C) - \frac{s}{r^2};$$

donc $\frac{s}{r^2}$ peut être considéré comme l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique sur deux angles droits.

Cet excès, qui est proportionnel à l'aire du triangle, peut se calculer à *priori* par les données du triangle sphérique, considéré comme rectiligne. Si, par exemple, on a mesuré b, c et l'angle A, on a $S = \frac{1}{2}\, bc \sin. A$. Si les données du triangle sphérique n'en font connaître que le côté a et les angles adjacens B, C, on aura alors $S = \frac{1}{2}\, a^2 . \frac{\sin. B \sin. C}{\sin. (B + C)}$. Cette dernière formule se déduit de la première, par la substitution des valeurs de b, c, sin. A. En effet,

1.° A = supplément $(B + C)$; donc $\sin. A = \sin. (B + C)$;

2.° On déduit du (n.° 46) $b = \frac{a \sin. B}{\sin. (B + C)}$; $C = \frac{a \sin. C}{\sin. (B + C)}$.

126. Ce théorème reçoit de fréquentes applications dans les opérations géodésiques : on doit faire usage du principe qu'il consacre dans le calcul des triangles que les Ingénieurs conçoivent tracés sur la terre, considérée comme parfaitement sphérique. Les côtés de ces triangles réunissent les divers points de station qui ont servi de centre aux observations; mais, dans la pratique, ces points ne sont pas toujours également distans du centre terrestre.

On ne doit donc entreprendre le calcul des diverses parties d'un triangle observé, qu'après l'avoir réduit, par des corrections dont il sera parlé dans le chapitre suivant, au triangle qui résulterait de ses projections sur la surface de la terre.

Pour appliquer le théorème à des nombres, et donner un moyen d'apprécier l'erreur de l'observation, reprenons le triangle dont on a calculé toutes les parties n.os 85 et suivans du chapitre I.er Nous supposerons que l'angle A et les deux côtés b, c qui le comprennent sont donnés; ces deux lignes ayant été mesurées sur la surface de la terre, participent de sa courbure, et doivent être regardées comme faisant partie d'un triangle sphérique.

$$\text{On a}\ldots \begin{cases} A = 47° \; 58' \; 30'', \\ b = 24385^{m}, \\ c = 15559^{m},276. \end{cases}$$

Nous avons vu (n.° 125) que l'excès de la somme des trois angles d'un triangle sphérique sur 180° était égal à la surface de ce triangle, estimée comme s'il était rectiligne, divisée par le carré du rayon de sa sphère; c'est-à-dire, à $\left(\frac{s}{r^2}\right)$, s représentant cette surface, et r exprimant ici le rayon de la terre.

Pour exprimer ensuite cet excès en secondes, il faudra recourir au problème traité n.° 120, qui a pour objet de convertir en secondes un arc connu par sa longueur absolue, et réciproquement d'estimer en mètres une valeur angulaire donnée.

Dans l'exemple proposé,

$$S = \tfrac{1}{2}\, b\, c\, \frac{\sin. A}{R};$$

R est ici le rayon des tables.

Si l'on applique les logarithmes à cette formule, on aura

$$\begin{array}{lcl} \log. \tfrac{1}{2} = 0{,}5 & = & 9{,}6989700, \\ \log. b & = & 4{,}3871228, \\ \log. c & = & 4{,}1919894, \\ \log. \sin. A & = & \underline{9{,}8709028.} \\ & & 28{,}1489850. \end{array}$$

Otant de ce logarithme celui de R qui est 10, et la dixaine introduite dans le log. 0,5, on aura

$$\log. S = 8{,}1489850.$$

Il faut encore ajouter à ce dernier nombre, pour avoir en secondes la valeur de l'excès cherché, le logarithme constant 5,3144251 (n.° 120), diminué du logarithme de r^2.

Or, puisque le quart du méridien $\frac{1}{2}\pi r$ est égal à 10000000 mètres, il est facile d'en conclure la longueur du rayon terrestre r, et l'on trouve

$$\log. r = 6{,}8038801;$$

d'où

$$\log. r^2 = 13{,}6077602;$$

donc

$$5{,}3144251 - 13{,}6077602 = -\, 8{,}2933351.$$

C'est ce dernier logarithme qu'il faut retrancher de log. S, et l'on aura, en appelant E l'excès sphérique,

$$\log. E = -\, 0{,}1443501,$$
$$E = 0'',717.$$



Ainsi le tiers de l'excès sphérique n'est que 0",239, et l'angle A corrigé devient

$$A' = 47^\circ\ 58'\ 29'',761.$$

Il reste donc à résoudre un triangle rectiligne, dans lequel on connaît les côtés b, c donnés ci-dessus et l'angle A' qu'ils comprennent. On pourra appliquer à ce calcul les formules exposées n.° 89 du chapitre I.er.

On remarquera combien la valeur de E est peu considérable, et quelle modique correction elle apporte dans la valeur de A. Il n'en serait pas de même si les côtés b, c étaient plus grands, ainsi que l'angle A. La valeur de E pourrait, dans ce cas, s'élever jusqu'à 15"; mais comme l'exemple choisi repose sur des données supérieures à celles qui résultent des opérations ordinaires du cadastre, il s'ensuit que le plus souvent on pourra négliger l'excès sphérique, et employer immédiatement dans le calcul les observations faites sur le terrain.

CHAPITRE III.

OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES;

PAR M.[r] POMMIÉS.

§. I.

Considérations générales.

127. LA géodésie, en se bornant à la signification propre de ce mot, est l'art de diviser et de mesurer les terrains : mais, depuis les découvertes des voyageurs, les progrès de l'astronomie et le perfectionnement des méthodes et des instrumens, le sens de ce mot a reçu une extension correspondante au développement des nouvelles connaissances ; et l'on entend aujourd'hui par *géodésie*, la science qui comprend l'ensemble des opérations dont le but est de déterminer sur la surface de la terre la position de différens points remarquables, de mesurer leurs distances respectives, de calculer la surface du polygone sphérique formé par le concours de ses côtés, et, enfin, de représenter sur une surface plane, suivant des proportions conventionnelles, le polygone qui résulterait de la projection de celui du terrain sur un plan horizontal.

128. Les difficultés que présentent dans la pratique les opérations de la géodésie, varient suivant l'étendue plus ou moins considérable des pays dont on veut former le plan. Si l'ingénieur doit mesurer la distance de deux points très-éloignés, s'il se propose de circonscrire un grand territoire pour en évaluer la superficie, l'estimation rigoureuse de la ligne ou de la surface dépend alors de la forme du globe, et l'on ne peut puiser des notions précises sur la figure de la terre que dans l'étude de l'astronomie.

Si, au contraire, le territoire qu'il s'agit de mesurer est renfermé entre des limites rapprochées, il participera peu de la courbure de la terre, et pourra sensiblement alors être regardé comme un plan.

Dans ces deux cas, on conçoit que l'on a superposé une suite de triangles liés entre eux par des côtés communs, sur un segment plus

on moins grand de la terre. Si ce réseau couvre une vaste contrée, on devra le considérer comme formé de triangles sphériques ; s'il ne s'étend que sur l'enceinte d'une commune, on pourra le supposer composé de triangles rectilignes.

Maintenant il est évident que, pour avoir l'expression numérique de la surface des pays que l'on conçoit ainsi divisée en sections triangulaires, il ne s'agit plus que d'estimer séparément celle de chaque triangle, et de prendre la somme de ces résultats partiels. La trigonométrie rectiligne et la trigonométrie sphérique enseignent des méthodes pour se conduire dans le calcul des différentes sortes de triangles, et c'est de l'observation que le géomètre doit obtenir les élémens de ces calculs.

129. Les travaux du terrain se réduisent par conséquent à savoir mesurer la grandeur d'un angle et la longueur d'une ligne.

Pour mesurer les angles, on emploie divers instrumens. Le paragraphe suivant renfermera la descripríon d'un cercle construit par M. *Lenoir*, et qui réunit plusieurs avantages que ne présentent pas les graphomètres ordinaires ; ce qui a déterminé un grand nombre de géomètres en chef à l'adopter pour leurs opérations.

130. Plusieurs obstacles peuvent s'opposer, soit à l'exactitude, soit à la possibilité de l'observation d'un angle. La construction des instrumens exige que leurs centres soient établis au centre même de la station : souvent des causes physiques rendent cette condition impossible à remplir ; alors on se contente d'observer l'angle dont on a besoin, à quelque distance de la véritable station ; puis on déduit de cette observation l'angle dont le sommet serait placé au point inaccessible, à l'aide d'une formule élégante, publiée par M. *Delambre*, et qui sera l'objet du troisième paragraphe.

131. Souvent aussi les signaux sur lesquels on dirige la lunette de l'instrument, ne sont pas terminés par des flèches ; et si leurs dimensions sont considérables, on ne peut pointer que *par estime* sur l'axe de ces signaux ; s'ils sont éclairés obliquement par le soleil, on peut confondre dans l'éloignement le milieu de la partie éclairée avec le milieu du signal. Ces deux sources d'erreurs exigent de nouvelles corrections, que l'on évite le plus souvent, en faisant élever un point de mire remarquable au sommet des édifices qui pourraient donner lieu à ces inconvéniens. C'est pourquoi je me suis dispensé de rapporter ici les formules relatives à ces deux cas : on

on les trouvera exposées avec détail dans le Mémoire de M. *Delambre* sur la détermination de l'arc du méridien.

132. Dans les pays où les irrégularités des terrains sont très-sensibles, et où les points de vue ne s'étendent pas à une grande distance, il arrive souvent que le plan de l'instrument, malgré le mouvement vertical de la lunette, ne peut être maintenu dans une situation horizontale; il en résulte que l'angle ainsi observé n'est pas égal à celui qui doit être construit sur la carte : cette circonstance exige une formule qui conduise à l'angle de réduction.

133. Quand les angles d'une suite de triangles ont été observés avec les soins convenables, et que leur mesure a éprouvé toutes les corrections dont on vient de parler, ces angles appartiennent alors à des triangles projetés sur un plan horizontal.

134. La connaissance des angles dans un triangle rectiligne ne suffit pas pour déterminer sa surface, ni la longueur de ses côtés; il faut donc chaîner l'un d'entre eux, et cette opération est une des plus délicates dans ses détails. Le choix du terrain n'est pas indifférent. On trouve rarement, dans les plus grandes plaines, une étendue, en ligne droite, sans inégalités sensibles, et dont les extrémités puissent être vues l'une de l'autre. Le bord des rivières qui ont peu de pente, les routes, les marais, offrent les emplacemens les plus favorables pour la mesure d'une base. Si un obstacle oblige de dévier un peu de la ligne droite, on mesure alors deux lignes qui fassent entre elles un angle fort approchant de 180°; et l'on choisit pour base le troisième côté de ce triangle, que l'on déduit du calcul. On insistera sur les attentions qu'il faut apporter dans la mesure d'une base, pour éviter les erreurs de calcul qui en seraient la conséquence, et sur les précautions auxquelles il convient d'avoir égard, pour soustraire, autant que possible, les instrumens à l'influence des variations hygrométriques.

135. A l'aide des opérations dont je viens de présenter le tableau, et dont on a soin de tenir un registre exact, on est en état de tracer, sur le papier, des triangles semblables à ceux qui couvrent le terrain; et, pour cela, on construit une échelle conventionnelle, à laquelle sont rapportés tous les côtés des triangles de la carte. Ce travail graphique conduit à

faire remarquer plusieurs sources d'erreurs qui peuvent s'introduire dans la confection d'un plan par le procédé du rapport. Il arrive souvent, en effet, que les côtés des triangles se coupent trop obliquement, et que l'on est dans l'impossibilité de préciser rigoureusement le point de concours de ces côtés. Une première déviation, d'abord insensible, conduit au déplacement de toutes les autres intersections, et tend ainsi à défigurer la position respective des objets. Pour obvier à cet inconvénient, on a imaginé de rapporter les différens points du plan à deux coordonnées rectangulaires ; et l'on a choisi pour ces axes la méridienne du chef-lieu, et une perpendiculaire à cette méridienne. Par-là, on vérifie les résultats du système triangulaire, et l'on oriente toutes les parties de la carte.

On rapportera, à la fin de ce chapitre, les principales méthodes que l'on peut mettre en pratique pour déterminer rigoureusement la méridienne d'un lieu ; et l'on expliquera, par des exemples, le moyen de rapporter à cette ligne et à sa perpendiculaire tous les points d'un plan.

136. En réfléchissant sur la longueur des diverses opérations qu'exige le mode d'observation précédent, sur les nombreuses incorrections que l'on peut commettre, soit en consultant le limbe de l'instrument dans l'estimation des angles, soit en exécutant le rapport et la réduction de tout le travail sur une carte, on a cherché à simplifier l'art de lever les plans des petits territoires, en rassemblant, dans une opération unique, les deux parties qui sont distinctes dans le premier procédé. L'instrument qui a offert ces avantages, est connu dans l'arpentage sous le nom de *planchette* : son emploi dégage l'ingénieur de l'embarras de tenir un registre de ses observations, de la nécessité de former un croquis ; il obtient immédiatement une minute fidèle des objets qu'il veut lever ; il peut apercevoir d'un coup-d'œil la représentation, en petit, du terrain sur lequel il opère. Cependant il ne faut pas s'en laisser imposer par ces apparences séduisantes d'exactitude : la planchette renferme beaucoup d'inconvéniens, qui forcent de recourir à d'autres instrumens, quand on prétend à une grande rigueur dans les résultats. En effet, on ne peut connaître par son moyen, ni la valeur des angles, ni la longueur numérique des côtés ; et le défaut de précision dans les intersections des lignes s'oppose souvent à l'orientement du plan. Toutefois cet instrument est celui que l'on doit préférer à tous dans les détails des travaux topographiques.

Plusieurs de ses applications ont déjà été développées dans l'Instruction du Ministre; et l'un des paragraphes du chapitre suivant sera consacré à compléter l'exposition de ses usages.

§. II.

Des Instrumens employés dans la mesure des Angles.

137. Le plus parfait de tous les instrumens dont on puisse prescrire l'usage dans les opérations géodésiques, est le cercle répétiteur, appelé aussi, du nom de son auteur, *cercle de Borda.* La description de cet instrument, les moyens de s'en servir dans la mesure des angles, et l'examen du degré de précision auquel il fait parvenir, ont été exposés avec beaucoup de soin et de clarté dans plusieurs ouvrages. Je me contenterai d'inviter les Géomètres qui sont pourvus de cet instrument, et qui desireraient étudier les détails de sa construction et de sa théorie, à consulter un Mémoire de MM. *Cassini*, *Méchain* et *Legendre*, ayant pour titre : *Exposé des opérations faites en France pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich*. Ils pourront lire aussi les mêmes développemens dans le Mémorial topographique, et dans l'excellent Traité de géodésie publié par M. *Puissant.* Quelque supériorité qu'ait obtenue le cercle répétiteur sur tous les autres goniomètres, cependant il a plusieurs inconvéniens qui ont déterminé un grand nombre d'Ingénieurs à ne point l'employer dans leurs travaux. La longueur des observations est un premier motif, puisque, pour arriver au degré de précision desirable, il faut répéter plusieurs fois la mesure de chaque angle; puis la fixité des lunettes, obligeant de placer le limbe du cercle dans le plan des objets, conduit, par conséquent, à la nécessité de réduire à l'horizon presque tous les angles observés. Ces deux causes de lenteur ne pouvaient pas s'accorder avec la célérité que le Gouvernement desire imprimer aux opérations du cadastre.

Pour lever ces difficultés, et pour offrir en même temps aux Géomètres en chef un instrument susceptible d'allier une grande justesse avec la rapidité, M. *Lenoir*, si avantageusement connu parmi les artistes constructeurs, a exécuté un cercle dont se servent la plupart des Géomètres en chef. Le compte que plusieurs d'entre eux ont bien voulu m'adresser, et les éloges qu'ils s'accordent à faire de cet instrument, m'engagent à le faire connaître, en le décrivant.

138. *(Fig. 20).* Ce cercle a trois décimètres de diamètre ; il est porté sur un pied terminé par trois tiges métalliques égales, et garnies de vis qui rendent faciles les moyens d'élever ou d'abaisser lentement le plan de l'instrument. Deux niveaux à bulles d'air, compris dans l'épaisseur du cercle, et placés à angles droits, servent à le disposer horizontalement. L'une des deux lunettes est placée au-dessous du limbe de l'instrument, et repose sur deux axes qui la rendent susceptible de prendre un mouvement d'inclinaison de 8 ou 10 degrés. Par-là, cette lunette peut se diriger sur les objets situés au-dessous de l'horizon.

La lunette supérieure est aussi montée sur deux axes, et sur une alidade terminée de part et d'autre par deux verniers qui se servent mutuellement de vérification. L'un des deux supports entre lesquels cette lunette se meut verticalement, est disposé en arc de cercle, divisé par demi-degrés ; et à l'aide d'une aiguille qui porte un vernier à l'extrémité inférieure, et que la lunette entraîne dans son mouvement, on peut estimer des angles d'élévation ou de dépression qui, dans leur plus grande valeur, sont mesurés par des arcs de 25 degrés environ.

Le double mouvement des deux lunettes donne ainsi la faculté d'obtenir, dans le plan vertical, des angles de 35 degrés ; et cette mesure permet aux rayons visuels d'atteindre le sommet des points élevés que l'on rencontre le plus communément dans la pratique, ainsi que le pied des objets qui sont situés le plus bas au-dessous de l'horizon.

Enfin, une vis tangentielle, pratiquée au-dessous de la lunette inférieure, fait tourner lentement le cercle, en lui conservant sa position horizontale, et sert à placer l'objet observé dans les fils de la lunette. Une autre vis est adaptée à l'alidade, et est destinée à produire le même effet sur la seconde lunette.

139. On peut remarquer dans la *figure 20* ces différentes pièces, dont il est facile de concevoir le jeu ; et je terminerai cette description, en invitant les Ingénieurs qui feraient usage d'un tel instrument, à bien s'assurer, avant toute opération, si le mouvement des deux lunettes autour de leurs axes se fait bien rigoureusement dans le plan vertical. Pour faire cette vérification, il faut suspendre, à quelque distance, un fil à plomb, suffisamment élevé ; diriger les lunettes sur ce fil, et placer le *(0)* de l'alidade sur le *(0)* du cercle. Alors, faisant tourner successivement les

deux lunettes, si l'œil de l'observateur aperçoit constamment le fil à plomb, on est assuré que leurs axes optiques se meuvent dans le même plan vertical ; mais si, au contraire, pour une certaine hauteur, le fil à plomb cesse de correspondre à l'intersection des fils de l'une des lunettes, il faut ramener cette lunette sur le fil à plomb, en faisant tourner l'alidade, et tenir registre de l'angle de déviation, pour y avoir égard lorsqu'on sera conduit par la suite à estimer un angle de même hauteur.

Exposons maintenant les usages du vernier, et la manière de lire sur le limbe de l'instrument, l'angle que font entre eux les axes des deux lunettes dans une position quelconque.

De la Division du Vernier.

140. Lorsque le limbe d'un cercle ou d'un graphomètre ordinaire n'est divisé qu'en degrés, on ne peut obtenir, par le secours de cette division seule, que le nombre des degrés contenus dans un angle observé, et n'avoir le plus souvent sa mesure qu'à moins d'un degré près. Si le limbe était divisé en demi-degrés, quand un angle ne serait pas mesuré par un nombre exact de demi-degrés, on ne pourrait avoir sa valeur qu'à moins d'un demi-degré près ; et ainsi de suite.

Si l'on veut différer moins, et estimer l'intervalle qui sépare la véritable mesure de l'angle, du plus grand nombre de degrés ou demi-degrés contenus dans cette mesure, on recourra, pour y parvenir, à la méthode inventée par *Nonius*, et perfectionnée par *Vernier.*

141. Cette méthode consiste (*fig. 21*) à prendre sur le limbe du cercle un certain nombre des divisions qui y sont inscrites, et un arc concentrique de même grandeur sur l'alidade mobile AA', où l'on a coutume de graver le vernier.

On divisera ensuite l'arc de l'alidade en un certain nombre de parties égales, plus grand d'une unité que le nombre des divisions tracées sur l'arc égal du limbe; de manière que si l'arc BB' du limbe contient m parties égales, l'arc AA' du vernier en contiendra $m+1$. Cela posé, si l'on fait coïncider le (*o*) du cercle avec le (*o*) du vernier, on remarquera un intervalle entre les traits qui terminent la première division du limbe et de l'alidade. Pour estimer cette différence, on appellera a la valeur angulaire d'une division du limbe, et a' la valeur angulaire d'une division du vernier; on

a, d'après ce qui procède,

$$ma = (m + 1)\,a' \ldots\ldots (1);$$

d'où
$$a' = \frac{m}{m+1}\,.a,$$

et
$$a - a' = a - \frac{m}{m+1}\,.a = \frac{a}{m+1};$$

c'est-à-dire que la différence entre la plus petite division du cercle et celle du vernier, est égale au quotient de la valeur angulaire de la plus petite division du limbe, par le nombre total des divisions du vernier.

142. Cherchons comment il convient de diviser le limbe d'un graphomètre ou d'un cercle et l'arc de l'alidade mobile, pour que cet instrument donne des observations, à moins de 1′ près : on commencera par diviser le limbe du cercle en demi-degrés, de manière qu'avec ce limbe seulement on peut faire l'observation d'un angle, à moins de 30′ près ; pour atténuer tellement cette erreur, que l'on puisse ne différer de la vérité que d'un angle moindre d'une minute, on observera que si l'on rend la différence entre une division du limbe et une division de l'alidade mobile égale à 1′, il faudra que chaque division du vernier exprime 29′. L'équation (1) devient par-là $m \times 30' = (m + 1) \times 29'$;
d'où

$$\frac{m}{m+1} = \frac{29}{30},$$

équation que l'on satisfera, en faisant $m = 29$ et $m + 1 = 30$.

Or, m représente le nombre des divisions égales chacune à 30′, qu'il faut prendre sur le limbe, et $m + 1$ le nombre des divisions égales chacune à 29′, qu'il faut prendre sur l'alidade mobile, pour faire un arc égal à celui du limbe. Ainsi l'artiste, après avoir divisé le limbe du cercle en demi-degrés, formera sur l'alidade un arc concentrique égal à 29 divisions du limbe, et il partagera cet arc en 30 parties égales. Le cercle dont on a donné la description, est divisé de cette manière, et donne, par conséquent, le résultat des observations, à moins de 1′.

Par des raisonnemens semblables, on est conduit à remarquer que, pour construire un cercle qui estime les angles à moins de 2′, il faut diviser son limbe en demi-degrés, prendre sur ce limbe un arc de 14 divisions, et partager un arc de cette grandeur, porté sur l'alidade, en 15 parties égales.

C'est ce qu'indique l'équation

$$m \times 30 = (m + 1)\, 28,$$

qui devient

$$\frac{m}{m+1} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}.$$

143. On voit, par ce qui précède, comment on doit procéder dans la construction d'un cercle, pour disposer la relation entre les divisions du limbe et celles du vernier, de manière à donner la valeur d'un angle, à moins de 1' ou 2' près de sa vraie mesure : il est facile d'en déduire le moyen d'obtenir une approximation quelconque. Examinons maintenant l'usage que l'on peut tirer de cette correspondance, pour lire sur l'instrument un angle observé.

Pour cela, proposons-nous ce problème :

Un angle étant estimé avec le cercle, déterminer le nombre de degrés et parties de degré de l'arc qui le mesure, connaissant le degré d'approximation que donne l'instrument.

On supposera que l'instrument est divisé de manière que le vernier contient une division de plus que l'arc égal pris sur le limbe.

Cela posé :

(Fig. 21.) 1.° Si le *(o)* de l'alidade correspond à une division du limbe, l'angle observé sera mesuré par l'arc compris entre le zéro du limbe, et la division qui répond au zéro de l'alidade.

(Fig. 22.) 2.° Si le *(o)* de l'alidade tombe entre deux divisions consécutives du limbe, alors on cherchera quelle est la division du vernier qui répond exactement à une division du limbe, ou qui en approche assez sensiblement pour que le petit arc qui les sépare puisse être regardé comme inappréciable. Il est visible que la mesure cherchée est, dans ce cas, l'arc du limbe compris entre son zéro, et la division qui répond à une de celles du vernier, moins l'arc du vernier compris entre ce point de coïncidence et son zéro.

Soient donc *(fig. 22)*,

$CD = a$ le nombre des sous-divisions du cercle que contient une division du limbe ;

$C'D' = b$ le nombre des sous-divisions du cercle que contient une division du vernier ;

$a - b = d$ nombre des divisions du cercle, qui exprime la différence entre une division du limbe et une division du vernier;

$RS = A$ nombre des divisions du limbe comprises entre (o) et la division la plus immédiatement voisine du zéro du vernier;

$ST = m'$ nombre des divisions qui suivent la dernière de A, jusqu'au point de coïncidence;

$S'T' = n'$ nombre des divisions du vernier, depuis le point de coïncidence jusqu'à son zéro;

$IS = x$ partie de la division du limbe, qui suit la dernière de A, jusqu'au zéro du vernier.

On a, entre ces diverses quantités, l'équation suivante;

$$Aa + x = Aa + m'a - n'b,$$

de laquelle on tire,

$$x = m'a - n'b;$$

mettant pour a sa valeur $b + d$, il vient

$$x = (m' - n')b + m'd \ldots\ldots (1).$$

Cherchons la relation qui existe entre m' et n'.

Si, dans une position initiale, le zéro du vernier répond à une division du limbe, alors la dernière division du vernier coïncidera également avec une division du limbe, et le vernier comptera une division de plus que l'arc égal du limbe. Désignons cet arc par B, et supposons maintenant que le vernier s'avance sur le limbe, de manière que l'avant-dernière division du vernier coïncide avec la dernière de l'arc B; il y aura alors, depuis le zéro du vernier, qui tombe entre les traits de la première division du limbe, jusqu'au point de coïncidence, une division de moins, c'est-à-dire, autant qu'entre ce point de coïncidence et la division du limbe à laquelle répondait le zéro du vernier dans la position initiale.

Si le vernier continue de s'avancer d'une nouvelle division, son zéro aura passé le trait de la première division du limbe, et sera compris dans l'espace de la deuxième division, de manière que le nombre des divisions du limbe aura diminué d'une unité, ainsi que celui des divisions du vernier. Puisque ces deux nombres de divisions étaient égaux dans la position précédente, ils conservent donc dans celle-ci leur rapport d'égalité.

Lorsque le vernier, par une troisième marche, aura de nouveau perdu une division, son zéro occupera l'espace de la division suivante du limbe; de sorte que sur le cercle on comptera en même temps une division

division de moins, depuis le point de coïncidence, jusqu'à celle inclusivement où répond le zéro de l'alidade. L'égalité entre les deux nombres correspondans de divisions sur le vernier et sur le cercle n'est donc point altérée, et l'on peut s'assurer généralement que cette égalité continuerait d'avoir lieu, jusqu'à ce que le zéro du vernier soit parvenu devant le trait qui termine la dernière division de l'arc B. Alors l'arc entier du vernier correspond à un second arc du limbe égal à B; les nombres des divisions marquées sur ces deux arcs cessent d'être égaux, et se trouvent dans le rapport de m à $m + 1$, comme pour la position initiale précédente. Si l'on imprime au vernier un nouveau mouvement circulaire, les circonstances que l'on vient d'examiner se reproduiront dans le même ordre, et l'égalité entre les nombres de divisions correspondantes sera rétablie.

Cette relation est fondée sur ce que le vernier ne peut avancer d'une division sans que son zéro passe en même temps d'une division du limbe dans l'intervalle de la division suivante; ce que démontrent les inégalités,

$$\begin{array}{lll} b < a, & \text{et aussi} & 2b > a, \\ 2b < 2a & & 3b > 2a, \\ 3b < 3a, & & 4b > 3a, \\ \text{\&c.} & & \text{\&c.,} \\ & & \text{jusqu'à } (m + 1)\, b = ma. \end{array}$$

Les premières sont évidentes par elles-mêmes, puisque $b < a$ résulte de ce que l'on a, $a = b + d$, et que les autres en dérivent.

Pour reconnaître la vérité des deuxièmes inégalités, nous représenterons, comme ci-dessus, par (m) le nombre des divisions de l'arc du limbe, égal à l'arc entier du vernier. Sa construction (n.° 141) donne

$$ma = (m + 1)\, b;$$

d'où

$$m\,(a - b) = b;$$

et puisque l'on a $a - b = d$,

on obtiendra $\left.\begin{array}{l} b = md \\ a = md + d \end{array}\right\}$.
et

Multipliant la première de ces deux équations par $m' + 1$, et la seconde par m', conservant à m' sa signification, il vient

$$\left.\begin{array}{l} (m' + 1)\, b = m'md + md \\ m'a = mm'd + m'd \end{array}\right\};$$
et

O

retranchant la seconde de la première,

$$(m' + 1) b - m' a = d(m - m') \ldots\ldots (2);$$

d'où l'on voit que les inégalités $2b > a$, $3b > 2a$, &c. seront vraies, tant que m' sera plus petit que m : ce qui doit toujours avoir lieu ; car la plus grande valeur de m' est de devenir égale à m ; et alors l'équation (2) donne

$$(m' + 1) b = m' a.$$

Il est donc reconnu que $m' = n'$; et, par conséquent, l'équation (1) se réduit à

$$x = m'.d \text{ ou } x = n' d,$$

ce qui conduit à la règle suivante :

Pour avoir le nombre des degrés et parties de degré qui mesurent un angle observé avec un cercle ou avec un graphomètre, il faut d'abord compter le nombre des divisions comprises entre le zéro du limbe et la division qui précède immédiatement le zéro du vernier, puis multiplier ce nombre par la valeur angulaire de la plus petite division du limbe ; on a ainsi un premier résultat. On comptera ensuite combien il y a de divisions sur le vernier, depuis son zéro jusqu'au trait qui coïncide avec l'un de ceux du cercle, et l'on multipliera ce nombre par la différence qui existe entre la valeur angulaire d'une division du limbe et la valeur angulaire d'une division du vernier. On obtiendra un second résultat, qui, ajouté au premier, donnera la valeur de l'angle observé, avec l'approximation dont l'instrument est susceptible.

§. III.

De la Réduction des Angles au centre de la station.

144. *(Fig. 11.)* Supposons que des deux points accessibles A et B, dont la distance est connue, on ait observé le signal C, et estimé les angles A et B : avec ces données on peut calculer toutes les parties du triangle ABC. Maintenant, si l'on se transporte au point C pour y vérifier l'angle dont il est le sommet, il peut arriver que des obstacles empêchent de pouvoir établir en ce point le centre de l'instrument ; on se placera alors en un point D', peu éloigné de la station C, et l'on mesurera l'angle $BD'A$. On propose de déduire de cette observation l'angle BCA, qui est la réduction de $BD'A$.

Pour cela, on estimera la longueur de CD', et la grandeur de l'angle $AD'C$. Les données sont les trois côtés a, b, c du triangle ABC;

l'angle $BD'A$, qu'on représentera seulement par D'; l'angle $AD'C = y$, et le côté $CD' = r$.

On sait que l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles internes opposés, et l'on voit, sur la *fig. 11*, que l'angle BIA est extérieur par rapport aux deux triangles BID', AIC. On a donc les équations

$$BIA = D'BC + D',$$
$$BIA = D'AC + C.$$

Égalant ces deux valeurs du même angle, il vient

$$C = D' + D'BC - D'AC.$$

Les deux triangles $D'BC$, $D'AC$, fournissent ces deux proportions :

$$\left.\begin{array}{l} a : r :: \sin.(D' + y) : \sin.\ D'BC \\ b : r :: \sin. y \quad\quad : \sin.\ D'AC \end{array}\right\}, \text{ (n.° 46);}$$

desquelles on déduit

$$\sin.\ D'BC = \frac{r.\sin.(D'+y)}{a},$$
$$\sin.\ D'AC = \frac{r.\ \sin.\ y}{b}.$$

Mais les angles $D'BC$, $D'AC$, étant toujours fort petits, on peut, sans erreur sensible, substituer aux arcs qui les mesurent, leurs sinus ; ce qui donne,

$$C = D' + \frac{r\sin.(D'+y)}{a} - \frac{r\sin. y}{b} \ldots\ldots (1).$$

Les termes C, D' de cette équation expriment des valeurs angulaires, que l'on peut convertir en secondes, tandis que les deux derniers représentent des sinus. Or, pour appliquer cette formule à des nombres, il faut établir l'homogénéité entre tous ses termes. On y parviendra facilement de la manière suivante :

Soient N et N' le nombre des secondes qui mesurent les angles $D'BC$, $D'AC$, on a

$$\frac{r\sin.(D'+y)}{a} = \sin.(N)'',$$
$$\frac{r\sin.\ y}{b} = \sin.\ (N')'';$$

et, à cause de la petitesse de ces angles, on peut écrire,

$$\frac{r\sin.(D'+y)}{a} = N\sin.\ 1'',$$
$$\frac{r\sin.\ y}{b} = N'\sin.\ 1'';$$

d'où

$$\frac{r \sin. (D' + y)}{a \sin. 1''} = N,$$

$$\frac{r \sin. y}{b \sin. 1''} = N'.$$

On voit, par ces résultats, que si dans l'équation (1) on introduit sin. 1″ comme facteur du dénominateur des deux derniers termes, ils seront alors de même nature que les deux premiers, c'est-à-dire qu'ils seront égaux à des nombres abstraits, contenant autant d'unités qu'il entre de secondes dans la valeur des arcs qui mesurent les angles $D'BC$, $D'AC$.

La formule (1) devient donc,

$$C = D' + \frac{r \sin. (D' + y)}{a \sin. 1''} - \frac{r \sin. y}{b \sin. 1''} \quad \ldots\ldots (2).$$

On peut lui donner cette forme,

$$C - D' = \frac{r}{\sin. 1''} \left\{ \frac{\sin. (D' + y)}{a} - \frac{\sin. y}{b} \right\}.$$

Pour faire usage de cette formule, il faudra avoir égard à la grandeur de l'angle $D' + y$ et de l'angle y. Lorsque $D' + y$ sera compris entre 0° et 180°, le sinus de cet angle sera positif; mais il deviendrait négatif, ainsi que le terme $\frac{r \sin. (D' + y)}{a \sin. 1''}$, si l'on avait $(D' + y) > 180°$. De même le terme $\frac{r \sin. y}{b \sin. 1''}$ restera négatif, tant que l'on aura $y < 180°$; il deviendrait positif, si l'angle y était supérieur à 180°.

145. Cette formule est susceptible de se réduire à une expression plus simple dans quelques cas particuliers; par exemple, si l'on observe du point D' l'angle des rayons visuels $D'A$, $D'B$, en supposant A un objet terrestre, et B le centre d'un astre, ou réciproquement, alors les termes $\frac{\sin. (D' + y)}{a}$ ou $\frac{\sin. y}{b}$ se réduiront à zéro, à cause de a ou b infiniment grand, et l'on a l'un des deux résultats suivans :

$$C - D' = - \frac{r}{\sin. 1''} \times \frac{\sin. y}{b},$$

$$C - D' = \frac{r}{\sin. 1''} \times \frac{\sin. (D' + y)}{a}.$$

Si A et B étaient deux objets célestes, ces deux termes seraient nuls en même temps, et la formule conduirait à $C - D' = 0$; d'où $C = D'$, c'est-à-dire que l'angle observé au point D' est égal à celui qu'on observerait au point C.

146. Cherchons de même, en supposant A et B deux objets terrestres, quel est le lieu du point D' pour lequel la réduction sera nulle. On aura, pour un tel point,

$$C - D' = o, \text{ ou } \frac{\sin.(D'+y)}{a} = \frac{\sin. y}{b}.$$

On tire de là $$\frac{\sin.(D'+y)}{\sin. y} = \frac{a}{b}.$$

Le triangle ABC donne cette proportion :

$$\sin. A : \sin. B :: a : b;$$

et puisque $A = 180° - (B + C)$, il s'ensuit, n.° 28, que $\sin. A = \sin. [180° - (B + C)] = \sin. (B + C)$. Substituant dans la proportion ci-dessus, il vient,

$$\sin. (B + C) : \sin. B :: a : b,$$

ou $$\frac{\sin.(B+C)}{\sin. B} = \frac{a}{b}.$$

Égalant les deux valeurs de $\frac{a}{b}$, on obtient,

$$\frac{\sin.(D'+y)}{\sin. y} = \frac{\sin.(B+C)}{\sin. B}.$$

Développant les numérateurs, n.° 76, il résulte,

$$\frac{\sin. D' \cos. y + \sin. y \cos. D'}{\sin. y} = \frac{\sin. B \cos. C + \sin. C \cos. B}{\sin. B};$$

exécutant les divisions par $\sin. y$ et $\sin. B$, le quotient donne

$$\sin. D' \frac{\cos. y}{\sin. y} + \cos. D' = \cos. C + \sin. C \frac{\cos. B}{\sin. B},$$

à cause de $C = D'$. On a

$$\left.\begin{array}{l}\sin. D' = \sin. C \\ \cos. D' = \cos. C\end{array}\right\}$$

Il reste donc, $$\frac{\cos. y}{\sin. y} = \frac{\cos. B}{\sin. B},$$

d'où (n.° 31) $\text{cotang. } y = \text{cotang. } B$, et, par conséquent, $y = B$, ou $180° + B$. On voit, par ce résultat, que l'angle réduit sera égal à l'angle observé, toutes les fois que le point D', sommet de l'angle y, sera situé en D, sur l'un des points de la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC.

147. Dans la pratique, il est difficile de déterminer, sur le terrain, des points qui appartiennent à cette circonférence ; mais on peut aisément se placer en l'un des points de la tangente CD', sur laquelle on choisira une station D',

peu distante de C. Pour se procurer la direction de cette tangente, il faut connaître l'angle A ou l'angle B, et pouvoir observer du centre C, d'où nous ne supposerons visibles que l'un seulement des deux signaux A ou B. En effet, l'angle BCD', qui est formé par une corde et par une tangente, a la même mesure que l'angle A; savoir, $\frac{BDC}{2}$; donc il lui est égal: par la même raison $ACD'' = B$. On a aussi $ACD' = 180° - B$, et $BCD'' = 180° - A$. Ainsi, si l'on connaît l'angle A, par exemple, et que, du point C, on ne puisse apercevoir que le signal élevé en B, on se servira de l'angle $180° - A$, pour obtenir l'alignement de la tangente $D'D''$.

Si l'on ne peut observer au point C, mais que les approches de ce lieu soient libres dans tous les sens, on remarquera que l'angle $CD'A$ est d'autant moins différent de l'angle B du triangle CBA, que le point D' est plus voisin de la circonférence. Il suffira donc dans ce cas, et lorsque l'angle B sera connu, de fixer les lunettes du cercle sous un angle égal à B, de l'établir le plus près possible du point C, et de diriger l'une des lunettes sur le signal A. La direction de la seconde lunette indiquera sensiblement celle de la tangente CD', et le point de station D' pourra, par conséquent, être regardé comme appartenant à cette ligne.

Il est utile d'examiner à combien de mètres du point C on peut se tenir éloigné sur l'étendue de la tangente, pour qu'il soit permis de négliger toute réduction dans l'angle observé, à cette distance du véritable centre.

Soit D' le lieu de la tangente où l'on établit l'instrument; si l'on joint D' avec le centre du cercle ABC par la droite $D'R'$, la partie extérieure $D'D$ de cette sécante estimera la distance la plus petite qui sépare D' de l'un des points de la circonférence, sur laquelle nous savons que la réduction est nulle: calculons $D'D$.

Le triangle rectangle $D'CR$ donne

$$D'R^2 = CD'^2 + CR^2,$$

ou

$$(D'D + DR)^2 = CD'^2 + CR^2.$$

Développant le premier membre, et remarquant que $DR = CR$, on a

$$DD'\{DD' + 2DR\} = CD'^2;$$

d'où

$$DD' = \frac{CD'^2}{DD' + 2DR}.$$

Si du centre R on abaisse sur AB la perpendiculaire RS, on formera un triangle rectangle ARS, dans lequel l'angle $ARS = C$. Représentant

le rayon des tables par r', ce triangle donne la proportion suivante :

$$r' : AR :: \sin. C : \tfrac{1}{2} AB,$$

ou, à cause de $AR = DR$, on a

$$r' : DR :: \sin. C : \tfrac{1}{2} AB.$$

On déduit de là, $\quad 2DR = \frac{r'.AB}{\sin. C}.$

Substituant cette valeur dans celle de DD', elle devient

$$DD' = \frac{CD'^2}{DD' + \frac{r'.AB}{\sin. C}} = \frac{CD'^2 . \sin. C}{DD'. \sin. C + r'.AB}.$$

Lorsque DD' et AB sont deux lignes rapportées à la même unité, on voit que les deux facteurs du terme DD' . sin. C sont moindres que ceux du terme $r'.AB$, et que plus D' est proche de C, plus il est permis de négliger DD' . sin. C. La valeur de DD' devient par cette considération,

$$DD' = \frac{CD'^2 . \sin. C}{r' . AB};$$

et puisque le triangle ABC donne

$$\frac{\sin. C}{AB} = \frac{\sin. A}{BC} = \frac{\sin. B}{AC},$$

on a encore

$$\left.\begin{array}{l} DD' = \frac{CD'^2 . \sin. A}{r'BC} \\ DD' = \frac{CD'^2 . \sin. B}{r'AC} \end{array}\right\}.$$

148. Cherchons une valeur de DD', pour un cas défavorable ; à cet effet, faisons $CD' = 20$ mètres, et $C = 90°$; on a alors sin. $C = r'$. Soit aussi $AB = 3000^m$, la valeur de DD' devient

$$DD' = \frac{20^2}{3000} = \frac{2}{15} = 0^m,133.$$

Ainsi un observateur situé sur la tangente CD', à 20 mètres du centre C, serait distant de $0^m,133$ du point de la circonférence circonscrite au triangle ABC le plus voisin de celui de station. La longueur DD' deviendrait plus considérable, si, conservant les mêmes valeurs à CD' et à C, on avait la base AB d'une moindre étendue. Par exemple, pour $AB = 800$ mètres, il vient $DD' = 0^m,5$. Il suit de là, que plus les côtés du triangle ABC sont petits, plus il est nécessaire d'établir le centre de ses observations près du point C.

149. Quand l'Ingénieur a reconnu la direction de la tangente, par



les procédés qui viennent d'être exposés, et qu'il a choisi sur cette ligne, pour faire ses observations, une station voisine du point C, il peut regarder les angles qu'il mesurera, comme égaux à ceux qui seraient obtenus en C, ou d'un autre point de l'arc CDB. Pour justifier cette considération, estimons l'erreur que l'on commet en négligeant la correction.

Pour cela, reprenons la formule (2), dans laquelle il faudra écrire, au lieu de $r = CD'$ (*fig. 11*), la valeur de cette ligne tirée de l'équation $DD' \doteq \frac{(CD')^2 . \sin. C}{r' . AB}$ (n.° 147), qui exprime que CD' est tangente au cercle ABC. Par cette substitution, la réduction prend la valeur suivante :

$$C - D' = \frac{\sqrt{(AB . DD' . r')}}{\sqrt{(\sin. C)} . \sin. 1''} . \left\{ \frac{\sin. (D' + y)}{a} - \frac{\sin. y}{b} \right\}.$$

Si nous supposons, comme ci-dessus, $C = 90°$, $AB = 3000^m$, $DD' = 0^m,133$, et si l'on fait de plus $\sin. (D' + y) = r'$, ainsi que $\sin. y$, on obtiendra par ces suppositions défavorables,

$$C - D' = \frac{20\, r'}{a . \sin. 1''} - \frac{20\, r'}{b \sin. 1''}.$$

Appliquant les logarithmes au calcul de ces deux termes, on a

$$\log. \left(\frac{20 . r'}{a . \sin. 1''} \right) = [(\log. 20 + \log. r' - \log. \sin. 1'') - \log. a] = (5{,}6154551 - \log. a)$$

$$\log. \left(\frac{20 . r'}{b . \sin. 1''} \right) = [(\log. 20 + \log. r' - \log. \sin. 1'') - \log. b] = (5{,}6154551 - \log. b).$$

On voit, par ces résultats, que plus les côtés a, b seront grands et près de l'égalité, moins la différence $C - D'$ sera considérable. Elle serait un peu au-dessous de $2{,}1''$, si l'on avait $a = 4000^m$, $b = 5000^m$. Dans des opérations géodésiques délicates, cette erreur ne pourrait pas être négligée. Il convient donc que les côtés du triangle ABC, estimés en mètres, soient exprimés par des nombres de cinq chiffres, pour que, le point d'observation étant situé sur la tangente CD', à 20 mètres de la vraie station, on puisse regarder comme nulle la différence de l'angle observé à l'angle cherché. Dans les autres cas, il faudra se rapprocher d'autant plus du point C, que les côtés a, b, c seront plus petits ; et par des calculs semblables aux précédens, il sera facile d'apprécier les nouvelles valeurs de $C - D'$, correspondantes à celles de CD' et des côtés du triangle ABC.

150. Si l'observateur ne connaît pas les angles A, B du triangle ABC, et si le point C est inaccessible, il ne peut déterminer la direction de la tangente

tangente $D'D''$, et se trouve alors dans la nécessité de calculer la réduction par la formule (2).

Pour l'appliquer à un exemple, nous supposerons que les calculs trigonométriques relatifs à la triangulation de premier ordre, ont donné les distances BC, AC, et que l'on a

$$BC = a = 6642^m,3338 \qquad AC = b = 7578^m,9.$$

Les élémens de la formule

$$C - D' = \frac{r}{\sin. 1''} \left\{ \frac{\sin.(D'+y)}{a} - \frac{\sin. y}{b} \right\},$$

qu'il faut obtenir de l'observation, sont les angles D', y, et la distance r, qui n'est plus supposée comptée sur la tangente au point C.

Soient
$$CD' = r \quad = 15^m,$$
$$D' = BD'A = 53^\circ\ 52'\ 47''\ 33''',$$
$$y = AD'C = 55^\circ\ 34'\ 23''\ 15''',$$

type du calcul.

Le premier terme $\frac{r \sin.(D'+y)}{a \sin. 1''}$ donne, par les logarithmes,

log. r = log. 15^m.......... = 1,1760913
log. sin. $(D'+y)$ = log. sin. $109^\circ\ 27'\ 10''\ 48'''$.. = 9,9744725
compl. log. a. = compl. log. $6642^m\ 3338$..... = 6,1776793
compl. log. sin. $1''$......................... = 5,3144251

log. $\frac{r \sin.(D'+y)}{a . \sin. 1''}$.................. = 22,6426682;

ôtant à ce logarithme les deux dixaines introduites par les complémens, il reste 2,6426682, logarithme qui appartient au nombre 439,2.

Le second terme de la formule est

$$\frac{r \sin. y}{b \sin. 1''}.$$

Les logarithme appliqués à cette expression fournissent,

log. r = log. 15^m................. = 1,1760913
log. sin. y = log. sin. $55^\circ\ 34'\ 23''\ 15'''$........ = 9,9163741
compl. log. b = compl. log. 7578,9........... = 6,1203938
compl. log. sin. $1''$......................... = 5,3144251

log. $\frac{r \sin. y}{b \sin. 1''}$....................... = 22,5272843.

Supprimant de même deux dixaines à la caractéristique, il reste le logarithme 2,5272843, qui répond au nombre 336,73. Substituant ces

nombres à la place des termes qui les ont produits, la formule devient

$$C = 53^\circ\ 52'\ 47''\ 33''' + 439'',2 - 336'',73;$$

ou, convertissant en secondes l'angle D', on a $C = 193967'',55 + 102'',47$;
puis $C = 194070''02$, ou $C = 53^\circ\ 54'\ 30''\ 12'''$.
Ce résultat est, à moins de $1''$ près, supérieur à la véritable valeur de C. En effet, les deux côtés $BC = a$, $AC = b$, ont été déduits, par des calculs trigonométriques, de la connaissance du troisième côté $AB = c$, et des angles A et B, qui lui sont adjacens. On a supposé $AB = 6500^m$, $A = 55^\circ\ 40'$, $B = 70^\circ\ 25'\ 30''$; d'où il suit que la valeur vraie de c doit être $53^\circ\ 54'\ 30''$. Cette valeur ne diffère que de $12'''$ de celle obtenue ci-dessus par la formule.

151. *(Fig. 11.)* Parmi les divers élémens de la formule précédente, l'angle de direction y est quelquefois impossible à obtenir immédiatement par l'observation. Cet obstacle se présenterait, par exemple, si le point C était situé sur l'axe d'une tour ou d'un clocher dont l'intérieur fût invisible. Pour lever cette difficulté, il faut avoir égard à la forme du signal. Nous examinerons seulement le cas où la base de la tour ou du clocher est circulaire.

On menera du point D', deux tangentes $D't$, $D't'$, au cercle tnt', représentant la base de la tour qui a servi de signal; on prendra ensuite sur ces tangentes deux parties égales, $D'z$, $D'z'$, et, réunissant zz' par une droite, il est évident que le milieu n de cette droite sera sur la direction de CD'. Si donc on observe l'angle $n\,D'A$, il sera égal à l'angle y.

Pour mesurer CD', on chaînera $D'n$; puis on se procurera, avec un cordeau, la circonférence tnt', de laquelle il est facile de déduire la grandeur du rayon Cn. Ajoutant les lignes $C'n$ et nD', on aura ainsi la longueur de CD'. Si les localités ne permettent pas de mesurer la circonférence tnt', on se contentera d'estimer la longueur de la tangente $D't$, et du segment extérieur de la sécante $D'n'$; puis on fera la proportion suivante, que l'on démontre en géométrie :

$$D'n' : D't :: D't : D'n; \qquad \text{d'où } D'n' = \frac{D't^2}{D'n}.$$

Connaissant $D'n'$, on obtiendra le diamètre $2\,cn$, en retranchant $n\,D'$ de $n'\,D'$.

Lorsque la base de la tour est polygonale, les moyens d'observer l'angle y deviennent quelquefois plus difficiles; mais ces constructions se rencontrent moins fréquemment. On peut consulter, à ce sujet, le Mémoire de M. *Delambre* sur la détermination d'un arc du méridien, *page 26*.

§. IV.

De la Réduction des Angles à l'horizon.

152. *(Fig. 12.)* Si la figure du terrain dont on se propose de former le plan, était représentée par le polygone $ABCDE$, et que les points B, C, D, E, fussent élevés au-dessus de l'horizon, à des hauteurs assez inégales pour qu'il fût nécessaire d'avoir égard à ces différences, il faudrait, dans ce cas, projeter tous ces points sur un même plan horizontal, que l'on concevra passer par celui d'entre eux qui occupe le lieu le plus bas. On conduira donc ce plan par le point A, et, abaissant des sommets B, C, D, E, les verticales Bb, Cc, Dd, Ee, on formera, par la jonction des pieds de ces perpendiculaires, le polygone $Abcde$, que l'on appelle la *projection* du terrain $ABCDE$. C'est ce polygone de projection qu'il s'agit de représenter sur le papier, quand on entreprend la carte du territoire $ABCDE$; et le problème que nous nous proposons ici de résoudre, consiste à déduire de l'observation des angles d'élévation, et de la connaissance des diverses parties du polygone $ABCDE$, les côtés et les angles du polygone de projection.

153. Le travail de la triangulation du polygone $ABCDE$ a fait connaître la longueur de tous les côtés AB, BC, &c. de son périmètre, et la grandeur des angles de chacun des triangles CAB, DAC, EAD, dont la somme couvre la surface du territoire. Si, de plus, on observe les angles d'élévation BAb, CAc, &c. *(fig. 13)*, on aura les données nécessaires pour calculer, dans les triangles rectangles BAb, CAc, &c., les côtés horizontaux Ab, Ac, &c. Ces deux lignes ne suffisent pas pour déterminer toutes les parties du triangle de projection cAb. Mais on se procurera les élémens suffisans, en estimant l'angle compris cAb, qui n'est autre chose que la réduction à l'horizon de l'angle observé CAB.

154. *(Fig. 13.)* Pour cela, on élevera au point A la verticale Az; et puisque les lignes Ab, Ac, sont dans un plan horizontal, les angles zAb, zAc, seront droits; et, par conséquent, on connaîtra les angles ZAB, ZAC, puisqu'ils sont les complémens des angles d'élévation BAb, CAc, qui ont déjà été observés.

Maintenant, si l'on regarde le point A comme le centre d'une sphère

dont le rayon soit AZ, il est facile de voir (*fig. 13*) que les droites AB, AC, AZ, rencontreront la surface de cette sphère en trois points z, n, m; et que si, par ces droites prises deux à deux, on fait passer trois plans, ils détermineront, par leurs intersections avec la sphère, un triangle sphérique Znm, dont les côtés sont respectivement la mesure des angles ZAB, ZAC, CAB, déduits de l'observation. On connaîtra donc les trois côtés de ce triangle sphérique, dans lequel l'angle z est égal à l'angle cherché cAb (n.° 97, *chap. II*), et l'on calculera cet angle par la formule rapportée au 11.ᵉ cas du tableau II, *chapitre précédent*;

$$\sin. \tfrac{1}{2} z = R \left(\frac{\sin. (\frac{1}{2} s - zn) \sin. (\frac{1}{2} s - zm)}{\sin. zn . \sin. zm} \right).$$

Soient

$$CAB = 58° \; 54' \; 40'',$$
$$zn = ZAB = 77° \; 37' \; 30'',$$
$$zm = ZAC = 76° \; 51' \; 36''.$$

Les logarithmes appliqués à cette formule donneront

$$\begin{array}{rcl}
 & \log. R^2 = & 20 \\
\log. \sin. (\frac{1}{2}s - zn) = \log. \sin. \; 29° \; 4' \; 23'' & = & 9,6865687 \\
\log. \sin. (\frac{1}{2}s - zm) = \log. \sin. \; 29° \; 50' \; 17'' & = & 9,6968369 \\
\text{compl.} \log. \sin. zn = \text{compl.} \log. \sin. \; 77° \; 37' \; 30'' & = & 0,0102095 \\
\text{compl.} \log. \sin. zm = \text{compl.} \log. \sin. \; 76° \; 51' \; 36'' & = & 0,0115225 \\
\hline
 & & 39,4051376.
\end{array}$$

Supprimant deux dixaines à la caractéristique, et prenant la moitié de ce logarithme, on a

$$\log. \sin. \tfrac{1}{2} z = \log. \sin. \tfrac{1}{2} cAb = 9,7025688;$$

donc $$\tfrac{1}{2} z = 30° \; 16' \; 32'';$$

et, par conséquent, z, ou la projection de l'angle CAB, est égale à

$$60° \; 33' \; 4''.$$

155. On aurait un calcul semblable à entreprendre pour obtenir les côtés et les angles de la projection des triangles EAD, DAC. Puis les principes de la trigonométrie rectiligne s'appliquent à la recherche des parties qui restent encore ignorées dans le polygone projeté $Abcde$.

Il arrive souvent que les angles ZAB, ZAC, sont très-près de 90°, et n'en diffèrent que de 5 ou 6 degrés; dans ce cas, la formule précé-

dente devient plus pénible à calculer, à cause de l'extrême précision qu'il faut apporter dans l'estimation de l'angle *cAb*. Il est préférable alors et plus simple de chercher immédiatement la différence entre l'angle observé et cet angle réduit à l'horizon : elle est de quelques secondes seulement ; et l'on peut lire dans le Mémoire, déjà cité, de M. *Delambre*, page 37 ; la formule qu'il a calculée pour cet exemple.

Cette dernière circonstance n'exigera jamais aucun calcul, à l'aide du cercle dont on a donné la description, et qui procure immédiatement la réduction à l'horizon des angles observés, tant que le rayon visuel ne fait pas avec le plan de l'instrument un angle supérieur à 25°. On aura même rarement besoin d'avoir recours à la formule que l'on vient d'exposer, à moins que les objets élevés qui servent de point de mire, ne soient très-près de l'observateur.

§. V.

Des Instrumens employés dans la mesure des Bases. Recherche d'une formule pour obtenir la différence entre un arc de cercle et sa corde. Procédé pour corriger la longueur d'une base, des effets de la température sur les instrumens. Réduction au niveau de la mer.

156. On a déjà exposé (n.° 134) les principales conditions qui doivent déterminer l'Ingénieur dans le choix des terrains propres à la mesure des bases. Il est utile d'entrer ici dans de nouveaux détails à cet égard, pour faire connaître les instrumens les plus favorables à cette opération importante, et soumettre au calcul les corrections auxquelles il est quelquefois nécessaire d'avoir égard.

Une base géodésique présente le plus d'avantage possible, lorsqu'elle a été mesurée sur un terrain dont tous les points sont de niveau, c'est-à-dire, sur un terrain dont la surface est concentrique à celle des eaux tranquilles de la mer, lorsque l'étendue de l'arc du grand cercle auquel elle appartient, est à peu-près égale en longueur aux rayons visuels dirigés de ses extrémités vers les objets éloignés que l'on doit y rattacher, et enfin quand on peut apercevoir de l'un des points qui la termine, le signal élevé à l'autre point.

Les localités offrent rarement tant d'avantages réunis, et les plus longues bases que l'on ait pu chaîner, se sont peu élevées au-delà de 10000 mètres.

Les divers obstacles que les Ingénieurs éprouvent, soit des sinuosités du terrain, soit de ses inégalités, ont fait recourir, dans la mesure des bases, à des procédés différens : les uns appliquent immédiatement sur la terre la chaîne ou la règle qui sert d'unité de longueur, après avoir fait niveler et aplanir le terrain; lorsque cette opération est impraticable, ils étendent la chaîne sur un support, ou pont, élevé au-dessus du terrain, et auquel ils conservent dans toutes les stations une position parallèle à celle du terrain : les autres dirigent la chaîne, suivant une ligne droite horizontale, et se guident dans cette marche, à l'aide de jalons placés de distance en distance.

Les instrumens dont on se sert pour mesurer les bases, varient suivant l'étendue du terrain que l'on doit parcourir, et le degré d'exactitude que l'on se propose. Plusieurs Géomètres ont employé, pour verges, des tubes de verre. Les savans célèbres qui ont vaincu tant de fatigues et de dangers pour obtenir la longueur de l'arc du méridien, d'après lequel on a déterminé le mètre, se sont servis de règles de platine et de règles de fer. Enfin on peut encore faire usage, avec succès, de verges en bois de sapin, après avoir eu le soin de les faire long-temps bouillir dans une matière grasse, puis de les garnir d'un vernis épais : dans cet état, elles deviennent moins sensibles aux variations hygrométriques de l'air que les règles de métal, et sont, en outre, d'un transport plus commode. Pour mesurer de médiocres étendues, il suffit de la chaîne ou décamètre prescrit par l'Instruction du 10 ventôse sur le levé des plans du territoire des communes.

Il est aussi très-important que les deux extrémités de la base soient tellement choisies, que l'on puisse découvrir, de ces stations, le plus grand nombre des signaux remarquables distribués sur le territoire dont on lève le plan. Les lieux élevés remplissent souvent ces conditions, et alors on a coutume de les adopter pour points extrêmes de la base : mais il peut arriver que l'intervalle qui les sépare, soit occupé par des étangs, des marais, des bois, ou d'autres obstacles semblables, qui ne permettent pas de porter la chaîne sur la ligne droite qui réunit ces deux points ; alors on mesure une base auxiliaire à quelque distance, et on déduit, par des calculs trigonométriques, celle dont on ne peut obtenir immédiatement la longueur. Par exemple (*fig. 19*), soient A et B deux points situés à des hauteurs sensiblement égales au-dessus de l'horizon, et desquels on puisse apercevoir au loin tous les lieux environnans : on choisirait pour base la ligne AB

qui réunit ces deux stations ; et si l'on est dans l'impossibilité de parcourir son étendue, on pourra mesurer une base auxiliaire $a\,b$, des extrémités de laquelle les points A, B, soient visibles ; et à l'aide des triangles $a\,A\,b$, $a\,B\,b$, $a\,A\,B$, dont on connaît, par l'observation ou par le calcul, un nombre suffisant de données, il sera facile d'estimer la longueur de AB.

Ces trois triangles devront être regardés comme rectilignes, quand la longueur de leurs côtés sera peu considérable ; mais, dans le cas contraire, il faudra les traiter par les principes de la trigonométrie sphérique, et puiser dans le tableau II, *chap. II*, la solution des cas particuliers que leur résolution présente. Lorsque les distances des points A et B à la méridienne de Paris et à sa perpendiculaire sont connues, on peut s'en servir pour estimer la droite AB. Ce procédé est exposé (n.° 193).

157. *(Fig. x.)* Pour reconnaître d'une manière précise dans quel cas une base mesurée doit être prise pour un arc de cercle, et dans quel cas on peut la représenter par une ligne droite, il faut calculer généralement la différence qui existe entre un arc AMB, et sa corde AB, et déterminer le point où cette différence cesse d'être assignable sur un plan. Pour cela, il faut avoir égard à l'échelle dont on se sert pour établir ses dimensions. Celle ordonnée par les instructions du Ministre des finances, est de 1 pour 5000 ; c'est-à-dire que 5000 mètres mesurés sur le terrain sont exprimés par un mètre sur la carte. La plus petite division du mètre que donnent les instrumens ordinaires de rapport, est le millimètre, qui représente, par conséquent, 5 mètres du terrain. Lors donc que la différence de l'ac AMB à la corde AB sera égale ou supérieure à 5 mètres, il faudra regarder la base AMB comme un arc de cercle, ou la réduire à sa corde, pour la traiter ensuite comme une ligne droite.

(Fig. x.) On peut calculer facilement, par la formule suivante, la différence entre la longueur d'un arc terrestre, et celle de la corde qui le sous-tend.

Si l'on représente par b la longueur de l'arc $a\,m\,b$, dont le rayon $aC = 1$, et par c la longueur de sa corde $a\,b$, on aura cette équation

$$b - c = b - 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2}\, b.$$

Si l'on substitue, à la place de sin. $\frac{1}{2}\, b$, les deux premiers termes de son développement obtenus (n.° 125) du chapitre précédent, il viendra

$$b - c = b - 2 \left\{ \tfrac{1}{2}\, b - \frac{(\frac{1}{2}\, b)^3}{2 \cdot 3} \right\};$$

ou, en réduisant,

$$b - c = \frac{1}{24} \cdot b^3 \ldots (1).$$

Telle est l'expression de la différence entre les longueurs respectives d'un arc quelconque de cercle, dont le rayon est 1, et de la corde qui le sous-tend. Pour en déduire la différence entre un arc terrestre et sa corde, on observera qu'en appelant B l'arc terrestre AMB, semblable à (amb), et C sa corde AB, on a, d'après les rapports enseignés dans les élémens de géométrie,

$$\left.\begin{matrix} 1 : r :: c : C \\ 1 : r :: b : B \end{matrix}\right\} \text{d'où} \left.\begin{matrix} C = rc \\ B = rb \end{matrix}\right\} \ldots (2);$$

r est l'expression en mètres du rayon de la terre. Retranchant les équations (2), on a

$$B - C = r(b - c),$$

ou, d'après l'équation (1),

$$B - C = \frac{1}{24} \cdot rb^3;$$

et mettant pour b sa valeur $\frac{B}{r}$, il vient enfin, pour la valeur de la différence cherchée,

$$B - C = \frac{1}{24} \cdot \frac{B^3}{r^2} \ldots (3).$$

Pour appliquer cette formule, on calculera le logarithme de $24 \cdot r^2$, que l'on trouvera égal à 14,98797144, et on le retranchera de 3 log. B.

Supposons successivement $B = 1000^m$, 5000^m, 10000^m, on aura

$$\left.\begin{matrix} \log.(1000^m - C) = -5,98797144 \\ \log.(5000^m - C) = -3,89106144 \\ \log.(10000^m - C) = -2,98797144 \end{matrix}\right\} \text{d'où} \begin{matrix} C = 999^m999999 \\ C = 4999^m999872 \\ C = 9999^m998972. \end{matrix}$$

On voit, par ces résultats, que la corde d'un arc dont la longueur est 10000^m, ne diffère pas de cet arc d'un millimètre. On pourra donc toujours, dans les opérations ordinaires du cadastre, regarder les bases des communes comme des lignes droites, sans avoir égard à la courbure de la terre.

Pour ne rien laisser à desirer sur cette recherche, on peut se proposer de calculer la longueur que devrait avoir l'arc B, afin que la différence $B - C$ fût 5 mètres. On parviendra à déterminer B, en faisant, dans l'équation (3), $B - C = 5$; ce qui donne

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{B^3}{r^2} = 5;$$

et,

et, de là,

$$B = \sqrt[3]{(120\, r^6)}.$$

Prenant les logarithmes de part et d'autre, on aura

$$\log. B = 5,22898048\,;$$

par conséquent,

$$B = 169426^{m},172.$$

Dans aucune occasion on n'est conduit à mesurer des lignes d'une telle étendue.

158. Comme on ne saurait apporter trop de soin dans la mesure d'une base, il est bon d'être prévenu sur toutes les causes d'erreurs ; et celles qui peuvent résulter des changemens de température, méritent d'être indiquées. On sait que la chaleur exerce sur les métaux une action dont l'effet est d'accroître leurs dimensions, tandis que le froid leur fait éprouver une contraction qui les diminue. Des expériences délicates ont fait connaître que, pour chaque degré du thermomètre de *Réaumur*, le fer se dilate d'environ $\frac{1}{75000}$ de chacune de ses dimensions, le cuivre de $\frac{1}{43000}$, et le verre de $\frac{1}{10000}$. Si l'on rapporte ces résultats au thermomètre centigrade, on a, pour la quantité de dilatation que subit dans chacune de ses dimensions, et pour chaque degré de ce thermomètre, une règle métallique, dont la longueur est 1, les expressions numériques suivantes :

Pour le cuivre.... 0,000017843
Pour le fer....... 0,000010666 $= D'$
Pour le platine.... 0,000008565 $= D$.

Cela posé, soit une base B mesurée avec une chaîne de fer, que l'on a vérifiée en l'étalonnant sur le mètre original de platine, à la température de 10°; si, pendant le cours de l'opération, on a eu le soin de tenir registre des variations du thermomètre, et que le terme moyen corresponde à une température constante de 20°, on obtiendra, par le calcul suivant, la véritable longueur de la base.

On sait que l'étalon du mètre est une règle de platine, exposée à la température de la glace fondante, et égale à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre : lorsque l'on transporte cet étalon dans un lieu où la température est élevée, il cesse alors de représenter l'unité métrique ; et, par conséquent, la chaîne de fer qui a été étalonnée à la température de 10 degrés, n'est pas exactement égale au mètre.

Soients

$10° - x°$ le degré de température auquel la règle de fer est rigoureusement de la longueur du mètre original ;

1 la longueur du mètre de platine à la température de 10°, et, par conséquent, aussi celle de la chaîne de fer ;

$1 - 10D$ sera la vraie longueur du mètre de platine, ramenée au terme de la glace fondante ;

$1 - xD'$ exprimera également une longueur de la chaîne de fer égale au véritable mètre.

Egalant ces deux expressions du mètre original, on a

$$1 - 10D = 1 - xD';$$

d'où

$$x = \frac{10D}{D'}, \; x = \frac{10 \times 0,000008565}{0,0000010666} = 8° \text{ à-peu-près.}$$

Ainsi il faut que la chaîne de fer étalonnée à la température de 10° soit exposée à une température de 2° seulement, pour être égale au véritable mètre.

Maintenant, si l'on appelle u la longueur de la chaîne de fer à la température de 20°, et qu'elle soit contenue m de fois dans la base B, on aura

$$B = m \cdot u.$$

La longueur de cette chaîne ramenée à la température de 2°, sera $u - 18D'$. Si, à cet état, elle est contenue dans B, n de fois, on aura

$$B = n(u - 18D');$$

d'où

$$n = \frac{B}{u - 18D'};$$

et si l'on prend la longueur u de la chaîne pour unité, on a, pour la valeur de la base B,

$$\frac{B}{1 - 18D'} = \frac{B}{1 - 18 \times 0,000011} = \frac{B}{1 - 0,000198} = \frac{B}{0,999802};$$

et lorsque B sera égal à 10000 fois la chaîne de fer, on aura, pour sa vraie longueur,

$$B = 10001^{m}98.$$

L'excès $1^{m}98$ est assez sensible pour reconnaître la nécessité d'avoir égard à la température, sur-tout lorsqu'elle est élevée, et qu'on desire une grande précision.

Quand on construit la carte d'une vaste étendue, telle que la France, et que l'on veut regarder comme des arcs de grands cercles terrestres, les côtés du réseau triangulaire qui enveloppe le pays, il faut ramener toutes les bases partielles auxquelles on rattache les grandes triangulations, à un même niveau, et l'on choisit celui de la mer. Le calcul de cette réduction ne présente aucune difficulté, quand on suppose la terre sphérique : mais pour se procurer ses élémens, et déterminer la hauteur des stations au-dessus du niveau de la mer, il faut recourir aux observations barométriques. On trouvera la formule de M. *Laplace* relative à cet objet, exposée avec toute la clarté desirable, et accompagnée de développemens utiles, dans le Traité d'astronomie physique de M. *Biot.* On peut consulter aussi l'ouvrage déjà cité de M. *Puissant.* Au reste, cette réduction est ordinairement très-faible, et c'est ce qui m'engage à ne point rapporter ici les calculs qui y conduisent. On en peut juger par le résultat suivant, qui présente le cas le plus défavorable. Si l'on a mesuré une base de 60000 mètres de longueur, sur un terrain élevé au-dessus du niveau de la mer de 5877 mètres (ce qui équivaut à la plus grande élévation connue), la projection de cette base sur la surface de la mer sera de 59945 mètres, c'est-à-dire que la différence entre les deux bases sera à-peu-près de 55 mètres.

§. VI.

Du Calcul des Longitudes et des Latitudes. Exposition des différentes Méthodes usitées pour tracer la Méridienne d'un lieu. Moyens de rapporter les différens points d'un plan à la Méridienne de Paris, *et à sa Perpendiculaire.*

159. On peut déterminer la position des points situés sur la surface de la terre, ainsi que la distance itinéraire qui les sépare, quand on connaît la latitude et la longitude de ces points, ainsi que la région dans laquelle ces arcs sont comptés.

Pour bien comprendre comment on peut se procurer ces élémens du calcul, il faut rapporter plusieurs définitions nécessaires, et quelques procédés pratiques auxquels les Ingénieurs auront quelquefois besoin d'avoir recours.

160. La terre est un sphéroïde peu différent d'une sphère parfaite, et que l'on peut regarder comme telle dans le plus grand nombre des opérations géodésiques. Elle exécute son mouvement diurne autour d'une ligne qui passe par son centre, et que l'on appelle son *axe (fig. 15)*. Les extrémités de cette droite se nomment les *pôles* de la terre. Si l'on continue de prolonger cette ligne indéfiniment, elle ira se terminer dans la sphère céleste à deux points fixes. Celui de ces deux points qui répond à notre hémisphère, est rendu remarquable par le voisinage d'une étoile qui reste sensiblement immobile, tandis que toutes les autres semblent décrire autour d'elle des cercles d'autant plus grands, qu'elles en sont plus éloignées.

A cause de cette propriété, cette étoile a reçu le nom d'*étoile polaire*.

Si, par le centre de la terre et perpendiculairement à son axe, on fait passer un plan, l'intersection sera un cercle ERE', que l'on peut concevoir tracé sur la surface terrestre, et que l'on appelle *l'équateur*. En élevant ce plan parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il soit parvenu au pôle septentrional, ses intersections successives couvriront l'hémisphère boréal d'une suite de petits cercles, dont tous les centres seront sur l'axe, et dont les rayons vont toujours en diminuant. Ces cercles sont appelés, à cause de la position respective de leurs plans, des *parallèles à l'équateur*. Il est évident que la même construction peut avoir lieu pour l'hémisphère opposé.

161. En admettant toujours que la figure de la terre est celle d'une sphère parfaite, toutes les perpendiculaires menées aux divers points de sa surface sont des lignes qui convergent vers son centre. La direction de ces perpendiculaires est la même que celle des corps graves abandonnés à l'action de la pesanteur. Un fil, à l'extrémité duquel on suspend un corps, indique cette direction, qui est dite *verticale*. Le prolongement de ce fil va rencontrer la voûte céleste en deux points : le point supérieur s'appelle *zénith ;* le point inférieur, *nadir*.

162. Le plan que l'on ferait passer par l'œil d'un observateur, perpendiculairement à la verticale du lieu qu'il occupe, se nomme *plan horizontal*, et son intersection avec la sphère céleste forme les limites de l'horizon visible.

On conçoit que l'horizon varie d'un lieu de la terre à l'autre, et qu'il est d'autant plus étendu, que l'on observe d'une plus grande hauteur.

163. Si l'on prolonge jusque dans le ciel les plans des parallèles à l'équateur, ils décriront, sur la voûte céleste, des cercles concentriques à ces parallèles, et qui représentent la trace de la route que les astres paraissent suivre dans l'espace pendant le mouvement diurne de la terre. L'horizon coupe en deux segmens les cercles concentriques parallèles, qui ne sont pas situés tout entiers au-dessous de son plan. Les astres ne sont visibles pour un observateur, abstraction faite des effets de la réfraction atmosphérique, que quand ils parcourent l'arc de leurs cercles qui s'élève au-dessus de l'horizon, et ils ont terminé la moitié de leur cours lorsqu'ils sont parvenus au sommet de ces arcs.

164. Si l'on conduit un plan par trois de ces sommets, il passera de plus par les pôles de la terre, et par le zénith de l'observateur. Ce plan sera tout-à-la-fois perpendiculaire à l'horizon, à l'équateur et à ses parallèles. Ses intersections avec la terre et la sphère céleste sont deux cercles concentriques, que l'on désigne sous la dénomination de *méridien* céleste et de *méridien* terrestre.

Le méridien terrestre partage ce globe en deux hémisphères, l'un nommé *oriental*, et l'autre *occidental*. Les pôles de ce cercle forment, avec ceux de l'équateur, les quatre points cardinaux.

165. Voyons maintenant comment on peut fixer la position d'un point *(o)* sur la surface de la terre. Pour cela, on considérera la *figure 15*, dans laquelle le cercle EmE représente l'équateur, PmP'' un méridien, et les extrémités P et P'' de son axe, les pôles de la terre. Puisque l'équateur est un cercle de position invariable, il est naturel de chercher la distance qui sépare le point *(o)* de ce cercle : pour y parvenir, il faut, par ce point, faire passer un grand cercle de la terre perpendiculairement à l'équateur, et l'arc OR de ce grand cercle mesurera la distance du point *(o)* à l'équateur. L'arc OR, qui appartient au méridien passant par le point *(o)*, s'appelle *la latitude* de ce point.

La latitude d'un lieu sur la terre est donc, d'après cette construction, l'arc du méridien de ce lieu, compris entre le point que l'on considère et l'équateur.

166. Il est évident que la connaissance de la latitude d'un lieu ne suffit pas pour distinguer ce lieu de tout autre ; car, en ne considérant que

l'hémisphère septentrional, on voit que tous les points du *parallèle* (*pop'*) ont la même latitude *OR*. Pour désigner en particulier un point de ce parallèle, il faut encore connaître sa distance à un autre cercle fixe, ou l'angle que ferait le méridien de ce point avec un *premier méridien*, par exemple, avec celui qui passe par l'Observatoire de *Paris*. Cet angle *mPR* est mesuré par l'arc *mR* de l'équateur compris entre le premier méridien *Pm* et le méridien du lieu (*o*) (n.° 97, *chapitre précédent*). Cet arc *mR* s'appelle la *longitude* du lieu (*o*). On voit facilement que l'on pourrait mesurer, à la gauche du premier méridien, sur le prolongement de l'arc *mR* de l'équateur, un nouvel arc *mR'* égal à *mR*, et qui exprimerait la longitude d'un second point *o'* situé sur le même parallèle *pop'*. Il suit de là que non-seulement il faut connaître la longitude d'un point, mais encore qu'il est nécessaire de savoir si elle est *orientale* ou *occidentale*.

Ce qui précède suffit pour expliquer comment un point est fixé de position sur la terre, quand on connaît sa latitude et sa longitude, ainsi que la région dans laquelle ces arcs sont comptés. Il ne reste plus qu'à exposer comment on peut observer leur grandeur.

167. Soit *o* (*fig. 16*) le point dont on veut estimer la latitude. *POE* sera le méridien de ce point; et l'arc *OE* compris entre le lieu *o* et l'équateur *EIE'*, sera la latitude cherchée. Cet arc sert de mesure à l'angle *OCE*, qui est égal à l'angle *ZOe*, formé par la verticale du lieu et une parallèle au diamètre de l'équateur. Si l'on conduit au point *o* la tangente *hh'*, elle exprimera l'intersection du plan de l'horizon avec celui du méridien, et l'angle *hop* mesurera la hauteur du point de la sphère céleste qui répond au pôle boréal de la terre. Cet angle d'élévation est égal à la latitude. En effet, les deux angles *hoz*, *poe*, sont droits; ôtant de chacun d'eux l'angle commun *poz*, il reste $hop = zoe$.

On peut donc substituer à la mesure de l'arc *OE*, celle de l'angle *hop*.

168. L'observation de cet angle serait facile, s'il existait dans le ciel une étoile qui occupât exactement l'extrémité du prolongement de l'axe terrestre. On a déjà dit qu'il en avait été remarqué une qui jouissait à très-peu-près de cette propriété, et que, pour cela, on appelle l'*étoile polaire*. Examinons quels sont les moyens de la reconnaître dans le ciel, et quels sont ses usages pour observer la latitude et la méridienne d'un lieu.

Article I.er

Moyens de reconnaître dans le ciel l'Étoile polaire, et d'observer les Latitudes.

169. *(Fig. 17.)* On peut reconnaître sans peine l'étoile polaire, à la forme remarquable de la constellation dont elle fait partie, ainsi que par sa proximité d'un second groupe d'étoiles composant, par un arrangement inverse, une constellation semblable. Ces deux constellations connues sous les noms de *petite ourse* et de *grande ourse*, sont composées chacune de sept étoiles, dont quatre sont disposées en quadrilatère, et les trois autres présentent, sous une légère courbure, l'aspect d'une queue ou timon. Si, par les étoiles α et β de la grande ourse, on mène une ligne droite αP, elle passera très-près de l'étoile polaire P.

170. *(Fig. 18.)* Cette étoile étant bien reconnue dans le ciel par ces caractères, on estimera sa hauteur au-dessus de l'horizon, en disposant le plan de l'instrument que l'on a décrit, dans le vertical de l'otoile polaire. On s'assurera avec un niveau à bulle d'air, et par un fil à plomb fixé au centre de la lunette, que le limbe du cercle ne se dérange pas de la position verticale ; puis l'on dirigera la lunette inférieure sur l'étoile polaire, en prenant grand soin de placer son axe parallèlement au plan du cercle. On comptera, de la manière qu'il a été expliqué ci-dessus, le nombre de degrés et parties de degré porté sur l'arc AB. Cet arc est aussi la mesure de l'angle PCz, qui exprime la distance de l'étoile polaire au zénith. Le complément de l'angle observé ACB est égal à l'angle Pck', c'est-à-dire à l'angle que fait avec l'horizon le rayon visuel dirigé vers l'étoile. On obtiendrait donc ainsi la *latitude* du point *(o)*, en prenant ce point pour le centre de l'observation, si, en dirigeant la lunette sur l'étoile polaire, on a saisi avec précision l'instant de sa plus grande ou de sa plus petite hauteur. Les soins qu'il faut apporter pour obtenir rigoureusement cet instant, rendent cette opération fort longue. On lira ci-après (n.° 175) un moyen plus rapide et suffisamment exact dans la pratique.

Article II.

Procédés pour déterminer la Méridienne d'un lieu.

171. *(Fig. 16.)* Ces développemens sur les procédés propres à estimer la latitude d'un lieu quelconque *(o)*, me conduisent à exposer ceux qu'il convient d'observer pour obtenir la *méridienne* de ce lieu : on appelle ainsi l'intersection *oh* de l'horizon du point *(o)* avec le plan de son méridien *POE*. C'est donc la direction de cette intersection qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, on peut employer plusieurs moyens : les plus simples et les plus exacts sont ceux qui résultent de l'observation du soleil ou de l'étoile polaire.

172. Le premier consiste à élever, sur un terrain aplani et bien horizontal, un style incliné d'une manière quelconque, et terminé par une plaque percée d'un trou circulaire, destiné à laisser passer l'image du soleil. Si du centre de cette ouverture on abaisse un fil à plomb sur le plan horizontal, et que du pied de cette verticale on décrive sur le terrain plusieurs cercles concentriques, ces cercles seront rencontrés successivement dans des points correspondans, par l'ombre que le style projette sur l'horizon. On marquera par des piquets le point où l'ombre se termine pour un instant quelconque, ainsi que ses intersections avec les différens cercles concentriques; et l'on choisira, pour faire cette observation, un moment qui précède d'une ou de deux heures la plus grande élévation du soleil : après midi le soleil s'abaissera sur l'horizon, et l'ombre du style, en prenant des accroissemens successifs, repassera par les mêmes états de grandeur qu'il a parcourus avant son midi; on marquera de nouveau le point où l'ombre atteint une longueur égale à celle de la première observation; puis on jalonera, avec beaucoup de précision, une ligne qui partage en deux parties égales l'arc compris entre ces deux observations. Cette ligne sera la méridienne du lieu où le style a été fixé.

173. Cette méthode repose sur l'hypothèse que le soleil décrit chaque jour un parallèle à l'équateur céleste : mais, après avoir parcouru un de ces cercles, cet astre ne passe pas subitement dans le plan du parallèle suivant; il y parvient par une gradation insensible, et sa marche est réellement oblique par rapport aux parallèles. Il resterait donc à corriger l'angle

l'angle que la méridienne partage en deux parties égales, de l'erreur qui peut résulter de cette obliquité; mais elle est trop peu sensible dans l'espace de quelques heures, pour qu'il soit à craindre que la méridienne n'en reçoive une déviation notable. Pour apporter beaucoup de précision dans la bisection de l'angle formé par les traces égales de l'ombre, on établit horizontalement le cercle au pied du fil à plomb, en dirigeant ses lunettes respectivement dans la direction des deux traces: on compte le nombre des degrés de l'arc; puis on fait coïncider le *(o)* du vernier gravé sur l'alidade mobile, avec la division du limbe qui répond à la moitié de cet arc; on s'assure si la lunette inférieure est restée exactement dans la direction de l'ombre, et l'axe de la seconde lunette indique celle de la méridienne.

174. On peut substituer à ce procédé, qui exige que l'on fixe un style avec solidité et que l'on prépare un terrain horizontal, l'observation de deux hauteurs égales du soleil : pour cela, on dispose le plan de l'instrument dans une situation verticale; et après avoir placé l'une des lunettes horizontalement à l'aide du niveau à bulle d'air, on dirige la lunette mobile vers l'astre environ deux heures avant midi, et l'on estime sur le limbe l'angle d'élévation au moment que le bord du soleil touche les fils; ensuite on examine un point terrestre remarquable et éloigné dans la lunette horizontale, et l'on note avec soin les résultats de ces observations. Deux heures après midi, on met le plan de l'instrument dans le nouveau vertical du soleil, en conservant le centre de station, l'inclinaison respective des deux lunettes, et l'horizontalité de la première. Lorsque le même bord du soleil touche pour la seconde fois l'intersection des fils, on observe s'il se trouve un objet terrestre dans la direction du rayon visuel de la lunette parallèle à l'horizon, et l'on inscrit ce point de mire sur le registre des observations; ensuite on place le cercle horizontalement pour estimer l'angle que font entre eux les deux objets terrestres, et l'on termine l'opération comme il a été expliqué ci-dessus (n.° 172). Pour vérifier sa justesse, on estime, de la même manière, avant midi, la hauteur du soleil à différentes heures, et le soir des hauteurs correspondantes. Si toutes ces observations sont bien faites, la méridienne doit couper en deux parties égales chacun des angles horizontaux formés par les deux points terrestres qui répondent à deux hauteurs égales de l'astre.

175. *(Fig. 17.)* Le second moyen de tracer la méridienne d'un lieu consiste à répéter les opérations qui ont été prescrites (n.° 170) pour observer la latitude ; puis on fixera en terre plusieurs signaux dans l'alignement de la lunette horizontale ; et la ligne qui passera par ces signaux, indiquera la direction de la méridienne du lieu. On évitera la lenteur des observations qu'il faut entreprendre pour s'assurer que l'étoile polaire est dans le méridien d'un lieu, en faisant usage de cette remarque des Astronomes, savoir que l'étoile ε, la première de la queue de la grande ourse, passe sous le méridien en même temps que l'étoile polaire. Lors donc que ces deux étoiles seront cachées par le fil à plomb élevé sur le point dont on cherche la méridienne, on sera certain que l'étoile polaire est dans le plan de la méridienne. Il ne s'agit donc plus que de disposer l'instrument dans ce plan, en mettant son limbe verticalement, et en dirigeant sa lunette mobile sur l'étoile. Le prolongement de la lunette horizontale fait connaître la marche de la méridienne.

176. Si l'on aspire à une extrême précision, il est utile de considérer que l'étoile ε, qui, au mois de juillet 1751, passait exactement sous le méridien en même temps que l'étoile polaire, la devance maintenant de six minutes quarante-quatre secondes ; d'où il suit qu'il faut attendre 6′ 44″ après l'instant où les deux étoiles sont dans le vertical du lieu, pour que l'étoile polaire soit en effet dans le méridien. C'est alors qu'il convient d'établir le cercle verticalement dans le plan déterminé par l'étoile, le zénith de l'observateur, et le pied du fil à plomb.

177. Ces détails suffisent pour faire connaître comment on peut déterminer soit la latitude, soit la méridienne d'un lieu de la terre. Il en résulte que la latitude est un arc de méridien ; et si la terre est parfaitement sphérique, chaque degré de latitude, depuis l'équateur jusqu'aux pôles, doit avoir la même longueur absolue. Cette conséquence ne s'est pas entièrement vérifiée ; car des Astronomes célèbres ayant entrepris, dans différens climats de l'hémisphère boréal, la mesure de plusieurs degrés du méridien, ne les trouvèrent pas tous parfaitement égaux. En France, MM. *Delambre* et *Méchain* ont fixé la longueur du degré à 51307^{toises}, 40 ; au Pérou, il a été obtenu de 51077^{toises}, 70 ; et en Suède sa valeur s'est portée à 51473^{toises}, 01. On conclut de ces inégalités que la terre n'est pas sphérique, mais qu'elle est aplatie vers les pôles et renflée sous l'équateur.

Cependant la plus grande différence entre les degrés de latitude s'élève peu au-dessus de 396 toises; ce qui permet de regarder, sans erreur sensible pour les opérations ordinaires de la géodésie, la terre comme une sphère parfaite, et tous les degrés de latitude comme égaux. D'après cette hypothèse, le rayon de la terre exprimé en mètres sera de 6366198^{m}; et le degré de latitude, de 111111^{m}, 11.

Article III.

Moyens de mesurer les Longitudes.

178. *(Fig. 15.)* Passons maintenant au calcul des longitudes. Nous avons dit (n.° 166) que c'était l'arc de l'équateur compris entre le premier méridien et celui du lieu que l'on considère. Pour déterminer la mesure de cet arc, on observera que le mouvement diurne de la terre étant de 24 heures, pendant une heure le soleil et les autres astres semblent décrire la vingt-quatrième partie d'un parallèle à l'équateur, ou 15° de ce parallèle : par exemple, si l'arc $P'O$ du parallèle $pP'p'$ est de 15°, lorsque le soleil, parcourant ce parallèle, sera parvenu sous le méridien Pm, il faudra l'intervalle d'une heure avant qu'il arrive sous le méridien PoR. Par conséquent, les peuples situés sous ces deux méridiens compteront au même moment deux heures différentes. Il en est de même pour tous les lieux de la terre qui diffèrent en longitude. Il s'agit donc de rechercher un moyen propre à faire connaître le nombre des degrés contenus dans l'arc d'un parallèle quelconque $P'o$ compris entre deux méridiens; car il est évident que cet arc contient autant de parties égales du parallèle sur lequel il est compté, que l'arc correspondant MR renferme de degrés sur l'équateur.

179. *(Fig. 15.)* Pour parvenir à ce but, on peut employer avec succès la remarque précédente, qui est une conséquence du mouvement diurne de la terre. En effet, supposons que deux observateurs soient placés, l'un au point P' sous le premier méridien, et l'autre au point o; que chacun d'eux soit pourvu d'une excellente *montre*, telle que les *montres marines*, indiquant avec beaucoup d'exactitude les heures respectives des lieux P', o, et réglée d'après le passage du soleil à leurs méridiens : si maintenant ces deux observateurs aperçoivent au même moment un signal instantané, et qu'ils prennent sur leurs montres l'heure précise

à laquelle ce signal leur est apparu, ils pourront déduire de la différence des heures, la longitude du point *o*. En effet, à l'instant où le signal devient visible pour les deux observateurs, si la montre de celui qui est au point P' marque, par exemple, neuf heures du matin, tandis que la montre de celui qui est au point *o* marque huit heures, on pourra conclure que l'arc $P'o$ du parallèle pop' est la vingt-quatrième partie de sa circonférence, c'est-à-dire 15°; et puisque l'arc $P'O$ renferme autant de degrés que l'arc MR de l'équateur, il s'ensuit que la longitude du point *(o)* est de 15°.

180. On voit par-là que généralement, pour convertir la différence des heures, minutes et secondes marquées par les deux montres, en degrés de l'équateur, il faut multiplier par 15 l'expression numérique de cette différence. Les signaux astronomiques sont préférés, à cause de la facilité qu'ils ont de pouvoir être remarqués à de grandes distances : on choisit ordinairement pour cet usage les éclipses de lune, ou les occultations des étoiles fixes par cet astre.

181. Si les lieux des observations étaient *o* et p', le résultat des opérations qui viennent d'être indiquées, serait la mesure de l'arc op' ou de l'arc RE de l'équateur. Cet arc $RE = ME - MR$, et représente, par conséquent, la différence des longitudes de *o* et p'.

182. Il suffit d'un seul observateur pour estimer la longitude d'un point terrestre ou la différence des longitudes de deux lieux. S'il s'agit, par exemple, d'obtenir la longitude du point *o*, en regardant PM comme le premier méridien, l'observateur réglera sa montre de manière qu'elle marque 0°0'0", lorsque le soleil ou une étoile passera sous le méridien PmP''; puis, s'il prend l'heure indiquée par sa montre, lorsque le soleil ou la même étoile passera sous le méridien PoR du lieu *(o)*, il aura la distance $P'o$: prise sur le parallèle qui joint ces deux méridiens, exprimée en temps, il convertira facilement cette distance en degrés de l'équateur, d'après ce qui a été dit (n.° 180). En réglant la montre par rapport au méridien PoR, et se transportant au point p', on obtiendra de même l'arc op', différence des longitudes de *(o)* et de *(p')*.

Article IV.

Formule pour convertir les Degrés d'un Parallèle en Degrés de l'Équateur.

183. L'équateur étant un grand cercle de la terre, est égal au méridien PMP''; et, par conséquent, chaque degré de longitude compté sur l'équateur est de la même grandeur qu'un degré de latitude, c'est-à-dire qu'il équivaut à $111111^m,11$. Cette valeur du degré n'est plus celle qui convient, lorsque la longitude est estimée sur un *parallèle.* Il est visible, en effet, que les parallèles diminuent continuellement depuis l'équateur jusqu'aux pôles, et qu'il en doit être de même des degrés dans lesquels on les conçoit divisés. Pour éviter de considérer de petits cercles de la terre, et d'avoir égard au rapport de la grandeur de leurs degrés avec ceux d'un grand cercle, on a calculé une formule pour évaluer en degrés de l'équateur un certain nombre de degrés, minutes et secondes d'un parallèle tracé à une latitude connue. Voici cette formule :

184. *(Fig. 16.)* Soit VO la longitude d'un point O comptée sur le parallèle ovo'; cet arc contient autant de degrés, minutes et secondes que le segment NE de l'équateur, et ces arcs semblables sont entre eux comme les rayons de leurs circonférences respectives; on a donc

$$NE : OV :: CE : OR;$$

d'où

$$OV = \frac{OR}{CE} \times NE.$$

Le rapport $\frac{OR}{CE}$ exprime le cosinus de la latitude OE du point O, divisé par le rayon des tables, et NE est un nombre abstrait égal à celui des degrés de sa longitude ; ce qui donne, en appelant (l) la latitude de (o),

$$OV = NE \times \frac{\cos. l.}{r}.$$

On déduit de là cette règle :

Puor convertir un nombre de degrés, minutes et secondes d'un parallèle, en degrés, minutes et secondes de l'équateur, il faut multiplier ce nombre par le cosinus de la latitude du parallèle, divisé par le rayon des tables.

Par exemple, *Turin*, qui est au sud-est de *Paris*, sur un parallèle dont tous les points ont 45° 4′ 14″ de latitude, compte 5° 20′ de longitude.

Pour réduire cet angle en degrés de l'équateur, on fera

$$OV = (5^\circ 20') \times \frac{\cos.(45^\circ 4' 14'')}{r},$$

où, par les logarithmes,

$$\log. 5^\circ 20' = \log. \tfrac{320}{60} = \log. \tfrac{16}{3},$$

$$\log. 16 = 1,20411998,$$
$$\log. \cos. 45^\circ 4' 14'' = 9,84894956,$$
$$\text{comp. } \log. 3 = 9,52287875,$$
$$20,57594829:$$

ôtant de cette somme les dix unités introduites par le complément et le logarithme du rayon, il restera 0,57594829, qui répond, dans les tables, au nombre 3,7666; ou traduisant cette fraction décimale en minutes et secondes, on a, pour la longitude de *Turin* exprimée en degrés de l'équateur, 3° 45′ 59″,76.

185. En se rappelant que le degré de l'équateur, ainsi que celui du méridien, est de 111111ᵐ,11, il sera facile de convertir en mètres la latitude et la longitude de *Turin.* On trouvera que le produit de 45° 4′ 14″ par 111111ᵐ,11, donne 5,007,839ᵐ45 pour la longueur de l'arc du méridien compris entre *Turin* et l'équateur. De même le produit de 3° 45′ 59″,76 par 111111ᵐ,11, donnera 418511ᵐ,11 pour la longueur de l'arc du parallèle qui sépare *Turin* du méridien de *Paris.*

186. Si l'on veut connaître la longueur d'un degré d'un parallèle à la latitude de 45° 4′ 14″, il suffira de diviser le nombre 418511ᵐ,11 par la valeur angulaire de l'arc de longitude; savoir, par 5° 20′. Le quotient donnera 78470ᵐ,832.

C'est par de semblables calculs que l'on parvient à dresser une table de la valeur en mètres ou en toises du degré de longitude correspondant à chacun des 90 degrés de latitude. On trouve ces tables dans les traités d'astronomie.

187. En s'avançant vers les pôles, les degrés de longitude vont toujours en diminuant de grandeur; de sorte que deux villes situées sur deux parallèles différens peuvent avoir la même longitude, et sont cependant inégalement distantes du méridien. La plus éloignée de ce cercle est celle qui s'approche

le plus de l'équateur. De même aussi deux villes qui diffèrent en longitude et en latitude, peuvent occuper des situations respectives, telles que celle des deux qui a la plus grande longitude, soit en même temps la plus voisine du méridien. C'est ainsi qu'*Osnabruck (fig. 16)*, qui est au nord-est de *Paris*, sur un parallèle de 52° 16′ 4″ de latitude, et dont la longitude est de 5° 27′ 30″, est plus près du premier méridien, que *Turin*, dont la longitude est moindre de 7′ 30″.

ARTICLE V.

Calcul de la Distance itinéraire de deux Points terrestres dont on connaît la Latitude et la Longitude.

188. Ces notions générales étant bien comprises, les Ingénieurs du cadastre, aidés sur-tout des ressources de la pratique, pourront en déduire sans peine les meilleurs procédés à suivre, soit pour estimer la valeur angulaire de la latitude et de la longitude d'un lieu, soit pour calculer la longueur absolue de ces arcs, et déterminer, par leur connaissance, la position respective des principaux points des pays dont ils ont à figurer le plan, soit enfin pour tracer la méridienne du chef-lieu des communes. Mais, afin de compléter ces développemens, il me reste encore à exposer le moyen d'obtenir la distance itinéraire de deux points dont on connaît la latitude et la longitude.

189. *(Fig. 16.)* Proposons-nous pour exemple de chercher la distance de *Paris* à *Turin* :

La latitude de *Paris* est de 48° 50′ 13″; c'est la mesure de l'arc Rn du premier méridien : sa longitude est zéro.

La latitude de *Turin*, ou l'arc ts, est de 45° 4′ 14″; sa longitude orientale est de 5° 20′ : c'est la mesure de l'arc ns de l'équateur ou de l'angle polaire nPS.

Entre deux points pris sur une sphère, le plus court chemin est l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points. L'arc Rt représente donc la distance cherchée.

Cet arc fait partie d'un triangle sphérique PRt, dans lequel on connaît les côtés PR, Pt, qui sont les complémens des latitudes Rn, ts, et l'angle P compris entre ces arcs complémentaires.

Le calcul du côté Rt s'exécutera par les analogies du quatrième cas (tableau 2), ayant soin de remplacer, dans cet exemple général, le côté (c) par l'arc PR, le côté b par l'arc Pt, et l'angle A par l'angle P.

Type du calcul :

(Rn) latitude de *Paris* = 48° 50′ 13″ }
sa longitude .... = 0° 0′ 0″. }
(ts) latitude de *Turin* = 45° 4′ 14″ }
(ns) longitude .... = 5° 20′. }

Dans le triangle sphérique PRt, les deux côtés PR, Pt, sont les complémens des latitudes de *Paris* et de *Turin*, et ont pour valeur

$$PR = 41° 9' 47'' ; \quad Pt = 44° 55' 46''.$$

Le troisième côté Rt est l'objet de la recherche ; et l'angle au pôle P, qui a pour mesure (ns), est, par conséquent, de 5° 20′.

En consultant la solution du quatrième cas (tableau 2), on emploiera les analogies suivantes :

1.re R : cos. 5° 20′ :: tang. 44° 55′ 46″ : tang. AD,
log. tang. 44° 55′ 46″ = 9,9989304,
log. cos. 5° 20′ 0″ = 9,9981158.
19,9970462,
log. R = 10.
log. tang. AD = 9,9970462 ;

d'où

$$AD = 44° 48' 18'' 34'''.$$

Cet arc étant plus grand que le côté PR sur lequel tombe l'arc perpendiculaire CD, il s'ensuit que le second segment BD qui entre dans la 2.eme analogie, sera égal à $AD - PR$, et qu'elle devient,

cos. 44° 48′ 18″ 34‴ : cos. 3° 38′ 31″ 34‴ :: cos. 44° 55′ 46″ : cos. Rt.
log. cos. 44° 55′ 46″ 0‴ = 9,85001910,
log. cos. 3° 38′ 31″ 34‴ = 9,99912198.
19,84914108.
log. cos. 44° 48′ 18″ 34‴ = 9,85095691.
log. cos. Rt .... = 9,99818417.

On trouve Rt = 5° 14′ 10″, distance angulaire de *Paris* à *Turin*.

On

On convertira ces degrés en mètres, en multipliant $5^\circ\ 14'\ 10''$, ou le nombre abstrait équivalent $\frac{377}{72}$, par $111111^m,11$, valeur du degré terrestre. Le produit donne $581790^m,119$ pour la distance itinéraire de *Paris* à *Turin.*

ARTICLE IV.

Du Rattachement des Points d'une Carte à la Méridienne d'un Chef-lieu et à sa Perpendiculaire.

190. Au lieu de rapporter les points de la terre à un premier méridien et à un petit cercle parallèle à l'équateur, les Géomètres qui se sont occupés de dresser la carte d'un grand pays, ont préféré de les fixer par l'intersection de deux lignes, dont l'une est parallèle à la méridienne passant par le chef-lieu du pays, et la seconde parallèle à une perpendiculaire menée par ce chef-lieu à la méridienne. C'est ainsi que *Cassini* a construit la grande carte de France, en rapportant tous les lieux de cette vaste étendue à la méridienne qui passe par l'Observatoire de *Paris*, et à la perpendiculaire menée par ce point à la méridienne. Pour parvenir à ce but, ce Géomètre couvrit la France d'un réseau continu de grands triangles, à l'observation et au calcul desquels il apporta un soin extrême. Il désigna cette première opération sous le nom de *triangulation du premier ordre;* et c'est cet immense travail qui sert de base au cadastre général qui s'exécute aujourd'hui.

191. Les instructions du Ministre des finances prescrivent aux Ingénieurs en chef de lier, par des points de rattachement, les triangulations particulières des communes, aux différens lieux de leurs départemens qui entrent dans le canevas trigonométrique de *Cassini.* En exécution de cette disposition, le Ministre nous a chargés de vérifier les bulletins des grands triangles de cet Astronome, et notre collègue *Hautier* a entrepris et terminé cette longue révision. En publiant son ouvrage, il se propose de faire connaître les moyens de rectification qu'il a mis en pratique, et d'exposer les soins multipliés qu'il a apportés pour ne laisser échapper aucune faute typographique, ni aucune des erreurs nombreuses qui ont été introduites lors de la première confection de ces bulletins. M. *Delambre* a revu ce travail, et l'a enrichi de plusieurs observations. En attendant qu'il soit livré

à l'impression, le Ministre adressera à chaque Ingénieur en chef l'extrait qui concerne son département.

192. Examinons maintenant l'usage que peuvent faire les Ingénieurs du cadastre, de la grande triangulation de *Cassini*, et du calcul exécuté de la distance de chaque sommet de triangles à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire.

Avant tout, je ferai observer que la perpendiculaire à la méridienne de *Paris* n'est pas le parallèle à l'équateur qui passe par l'Observatoire. Ce cercle a la propriété de couper à angles droits la méridienne de *Paris*, ainsi que tous les autres méridiens; tandis que la *perpendiculaire* ne rencontre seulement à angle droit que le méridien sur le plan duquel elle est abaissée. On doit la considérer comme un grand cercle déterminé de position, par la condition de passer par le centre de la terre, par un lieu de sa surface, et perpendiculairement au méridien de ce lieu. Les arcs de cette perpendiculaire, ainsi que ceux de la méridienne, peuvent être regardés comme des lignes droites, lorsqu'ils sont compris entre des limites rapprochées.

193. *(Fig. 19.)* Supposons donc que A et B soient deux sommets de triangles dont les bulletins fassent connaître la distance à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire; nous figurerons, pour plus de simplicité, ces deux grands cercles par les deux lignes droites MO, OP, et nous représenterons de la même manière et par le même motif les arcs Am, AP, Bm', Bp', qui expriment la distance des points A, B, aux lignes MO, OP. En appliquant à ces distances les valeurs obtenues par *Cassini*, c'est, en effet, les regarder comme appartenant à des arcs de grands cercles, puisque ce Géomètre les a calculées dans cette hypothèse. Si les deux points A, B, sont peu éloignés l'un de l'autre; qu'ils soient situés, par exemple, dans une même commune, l'Ingénieur qui en doit lever le plan peut prendre la ligne AB pour base de sa triangulation partielle. Il connaîtra la longueur de cette base, sans avoir besoin de la chaîner, si ce n'est comme moyen de vérification, en observant qu'elle sert d'hypoténuse à un triangle rectangle $Ap^{iv}B$, dans lequel le côté $Ap^{iv} = Bp' - Ap$, et le côté $Bp^{iv} = Bm' - Am$. La longueur des lignes Bp', Ap, Bm', Am, est donnée immédiatement par les bulletins, et leurs différences $Bp' - Ap$,

$Bm' - Am$, sont assez faibles pour que le triangle ABp^{iv}, dont elles sont les côtés de l'angle droit, puisse être traité comme un triangle rectiligne (n.° 192). De la connaissance des trois côtés de ce triangle, il sera facile d'obtenir l'angle BAp^{iv}, que fait la base AB avec la méridienne du point A, sans être conduit à la nécessité d'exécuter aucune observation d'angles sur le terrain, ni de tracer la méridienne du chef-lieu.

Si les points A et B ne sont pas situés dans la même commune, mais qu'ils puissent être aperçus de son enceinte, l'Ingénieur pourra encore s'en servir utilement, pour orienter la triangulation de cette commune, et pour calculer la distance des points de son périmètre ou de son intérieur à la méridienne et à la perpendiculaire. En effet, soient (a) et (b) deux points de la commune d'où l'on peut apercevoir les signaux placés aux sommets A et B, on mesurera la ligne ab, et l'on déduira de l'observation les angles des triangles abA, abB. Par les principes de la trigonométrie rectiligne, on se procurera la longueur des côtés aA, bA. Cela posé, la distance des points a et b à la méridienne est,

$$\left.\begin{array}{l} an = as + Am \\ bn' = bs' + Am \end{array}\right\}\ldots(1).$$

Leurs distances à la perpendiculaire sont,

$$\left.\begin{array}{l} ap'' = Ap - As \\ bp''' = Ap + As' \end{array}\right\}\ldots(2).$$

Les arcs Am, Ap, sont inscrits dans les Tables de *Cassini*. Il reste à calculer les quatre distances as, As, bs', As', que leur peu d'étendue permet de considérer comme des lignes droites.

Les deux premières font partie du triangle rectangle aAs; les deux autres, du triangle rectangle bAs', dont les hypoténuses aA, bA, sont déjà obtenues. Il suffit donc de se procurer, dans chacun de ces deux triangles, un des angles aigus, pour être en état de calculer ces quatre lignes. Or,

$$aAs = 180° - (BAp^{\text{iv}} + BAb + bAa),$$
$$bAs' = BAp^{\text{iv}} + bAB.$$

Les seconds membres de ces équations sont composés de toutes quantités connues : par conséquent, on a, dans les triangles rectangles aAs, bAs', le nombre de données nécessaire pour le calcul des côtés de l'angle droit. Substituant les résultats de ces opérations dans les équations (1) et (2), on

obtient, avec une approximation suffisante dans la pratique, la distance des extrémités de la base *(a b)* à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire.

Connaissant ainsi ces distances, on pourra en déduire l'angle que fait *a b* avec la méridienne du chef-lieu, de la même manière qu'il a été expliqué ci-dessus relativement à *A B*.

Des procédés analogues fourniront toujours à l'Ingénieur les moyens de se conduire dans des cas semblables. Ce qui précède, suffit pour faire comprendre comment on peut rattacher aux points de *Cassini* la triangulation des communes qui les environnent, et quelles sont les observations géodésiques que l'on peut remplacer par de simples calculs.

194. L'art de bien observer est si difficile, tant de causes variées concourent à éloigner les résultats de leur juste valeur, les unes provenant de l'imperfection des instrumens, les autres des mauvaises dispositions de l'atmosphère, et de la complication des phénomènes célestes, que l'on ne saurait trop inviter les Ingénieurs du cadastre, soit à vérifier leurs opérations, en s'assurant qu'elles s'accordent parfaitement avec les données de *Cassini*, soit à s'appuyer sur ces données elles-mêmes, pour en déduire les triangles secondaires dont ils doivent couvrir le grand canevas trigonométrique : mais ces données ne suffisent pas toujours, et alors il faut recourir aux observations dont les procédés ont été décrits dans ce paragraphe. Par exemple, si la position d'une commune ne permettait d'apercevoir que le seul point *A*, on ne pourrait pas conclure de la distance de ce point à la méridienne et à sa perpendiculaire, les distances homologues des extrémités de la base *a b*, ni l'angle que fait cette base avec la méridienne du chef-lieu de cette commune ; il faudrait alors, pour suppléer à l'insuffisance des données, tracer la méridienne du lieu avec les précautions et par l'un des moyens ci-devant exposés, puis estimer l'angle que fait la base *(a b)* avec cette méridienne.

ARTICLE VII.

Moyen d'obtenir la distance d'un lieu *à la Méridienne de* Paris *et à sa Perpendiculaire, par la connaissance de la Latitude et de la Longitude de ce* lieu.

195. Indépendamment des accroissemens considérables que l'Empire a reçus depuis plusieurs années, il y a encore quelques parties de l'ancienne

France sur lesquelles le travail de *Cassini* ne s'est pas étendu. Pour connaître dans ces départemens la distance de leurs points principaux à la méridienne de *Paris* et à la perpendiculaire, on est conduit à examiner si l'on ne pourrait pas appliquer à cette recherche l'observation de la latitude et de la longitude de ces points, ou les valeurs d'un grand nombre de ces arcs qui se trouvent consignés dans la Connaissance des temps.

Voici l'énoncé du problème :

Étant donné les latitudes et la différence en longitude de deux villes ; par exemple, de Paris *et de* Turin, *déterminer la distance de* Turin *à la méridienne et à la perpendiculaire de* Paris.

(Fig. 14.) Soient p et t les points qui représentent sur la surface de la terre, *Paris* et *Turin* : Ppn sera le méridien qui passe par l'Observatoire de *Paris* ; Pts, celui de *Turin* ; les arcs Pn, st de ces méridiens seront le latitudes respectives des deux villes ; l'angle nPs ou l'arc ns de l'équateur qui le mesure, est la différence donnée de leurs longitudes. Maintenant, si par les points p et t on mène les arcs de grands cercles $pp'E$, mtE, tp', les deux premiers perpendiculaires au méridien Ppn, le troisième perpendiculaire à pE, on aura les arcs mt, tp', pour l'expression de la distance de *Turin* à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire (n.° 192).

1.° On peut voir, sur la figure, que l'arc (mt) fait partie d'un triangle sphérique rectangle Pmt, dans lequel on connaît l'angle droit m, l'hypoténuse Pt, qui est le complément de la latitude de *Turin*, et l'angle P opposé à l'arc mt. On déterminera la valeur angulaire de mt, en faisant usage de l'analogie du premier cas (tableau I du chapitre précédent).

2.° Pour calculer (tp'), on considérera les deux triangles sphériques rectangles Ets, Etp' ; dans le premier, on connaît l'hypoténuse Et, complément de mt qui vient d'être obtenu, et l'arc st. On pourra donc rechercher l'angle E, ou l'arc mn qui le mesure, par l'emploi de l'analogie du cinquième cas (tableau I).

Retranchant (mn) de la latitude de *Paris*, on aura la valeur de pm qui mesure l'angle tEp' ; de manière que, dans le second triangle Etp', on connaîtra l'hypoténuse Et et l'angle aigu tEP'. La proportion du premier cas donnera le côté opposé tp'.

196. Appliquons cette solution à des nombres.

1.° Dans le triangle Pmt, on a $m = 90°$, $Pt =$ compl. $ts =$

compl. 45° 4′ 14″, $P = ns =$ 5° 20′. L'analogie du premier cas devient

R : sin. 5° 20′ :: cos. 45° 4′ 14″ : sin. mt.

log. sin. 5° 20′ = 8,968249,
log. cos. 45° 4′ 14″ = 9,848949,
18,817198.

Otant à la caractéristique une dixaine, on a

log. sin. mt = 8,817198,

d'où

mt = 3° 45′ 49″ 9.

C'est la valeur angulaire de la distance de *Turin* à la méridienne de *Paris*. Si l'on cherche la longueur de cet arc, en adoptant toujours pour l'expression du degré terrestre le nombre 111111^m,11, on trouvera

mt = 418206^m,79.

2.° On connaît dans le triangle Ets, s = 90°, Et = compl. mt = compl. 3° 45′ 49″,9, st = 45° 4′ 14″. L'analogie du cinquième cas devient

cos. 3° 45′ 49″,9 : sin. 45° 4′ 14″ :: R : sin. E = sin. mn.

log. R = 10,0000000,
log. sin. 45″ 4′ 14° = 9,8500190,
compl. log. cos. 3° 45′ 49″,9 = 0,0009380.
19,8509570.

Otant la dixaine introduite par le complément, il vient

9,850957 = log. 45° 11′ 41″,6;

d'où

mn = 45° 11′ 41″,6.

Considérant enfin le triangle sphérique Etp', on y connaît l'angle $E = mp = pn - mn$ = 48° 50′ 14″ — 45° 11′ 41″,6 = 3° 38′32″,4, Et = compl. mt = compl. 3° 45′ 49″,9.

La première analogie (tableau I) devient

R :sin. 3° 38′ 32″,4 :: cos. 3° 45′ 49″,9 : sin. tp'.

log. sin. 3° 38′ 32″,4 = 8,802972,
log. cos. 3° 45′ 49″,9 = 9,999062.
18,802034.

Supprimant le logarithme du rayon, on a

$$8,802034 = \log.\ 3°\ 38'\ 4'',26;$$

d'où

$$tp' = 3°\ 38'\ 4'',26.$$

Estimant cet arc en mètres, on obtiendra

$$(tp') = 403835^{m},18.$$

C'est la distance en mètres de *Turin* à la perpendiculaire de *Paris.*

En exécutant un semblable calcul, pour tous les lieux que *Cassini* n'a pas compris dans sa triangulation, on pourra ensuite y appliquer les détails topographiques, comme il est dit (n.° 193).

197. Proposons-nous maintenant le problème inverse :

Connaissant la latitude et la longitude d'un lieu, de Paris, *par exemple, ainsi que la distance d'un autre lieu à la méridienne et à la perpendiculaire qui passe par l'Observatoire de* Paris, *déterminer la latitude et la longitude du second* lieu.

Choisissons *Turin* pour ce second lieu. Les données de la question sont

la latitude de *Paris* 48° 50′ 13″ = pn
sa longitude . . . . . . 0° 0′ 0″ } (*fig.* 14).

mt distance de *Turin* à la méridienne de *Paris* = $418206^{m},79$;
tp' distance de *Turin* à la perpendiculaire . . . . = $403835^{m},18$.

On cherche les arcs (ts) et (ns) qui expriment la latitude et la longitude de cette ville.

On convertira ces deux distances en degrés, en prenant leurs rapports au nombre $111111^{m},11$, qui est égal à la valeur du degré d'un grand cercle de la terre. On obtient ainsi

$$\left.\begin{aligned} mt &= \frac{418206,79}{111111,11} = 3°\ 45'\ 49'',9 \\ tp' &= \frac{403835,18}{111111,11} = 3°\ 38'\ 4'',26 \end{aligned}\right\}.$$

Dans le triangle sphérique Etp' rectangle en p', on connaît le côté tp', et l'hypoténuse $Et = Em - tm = 90° - 3°45'49'',9 = 86°\ 14'\ 10'',1$.

Pour déterminer l'angle $p'Et$ de ce triangle, ou l'arc (pm) qui lui sert de mesure, on se servira de l'analogie du cinquième cas (tableau I) ; elle

devient

$$\sin.\ 86^\circ\ 14'\ 10'',1 : \sin.\ 3^\circ\ 38'\ 4'',26 :: R : \sin.\ p'Et,$$

$$\log.\ R = 10,0000000,$$
$$\log.\ \sin.\ 3^\circ\ 38'\ 4'',26 = 8,8020340.$$
$$18,8020340.$$
$$\log.\ \sin.\ 86^\circ\ 14'\ 10'',1 = 9,9990623,$$
$$8,8029717 = \log.\ \sin.\ p'Et;$$

d'où

$$p'Et = pm = 3^\circ\ 38'\ 32''\ 62.$$

La valeur de (pm) conduit immédiatement à celle de (mn), qui sert de mesure à l'angle tEs du triangle sphérique rectangle Ets. On a $mn = tEs = pn - pm = 48^\circ 50' 13'' - 3^\circ 38' 32'',62 = 45^\circ 11' 40'',38$.

On connait donc dans le triangle Ets un angle aigu et l'hypoténuse Et. On peut, par conséquent, déterminer les deux côtés ts, Es, dont l'un est la latitude de *Turin*, et l'autre le complément de sa longitude.

L'arc (ts) s'obtiendra par la proportion du premier cas (tableau I),

$$R : \sin.\ 45^\circ\ 11'\ 40'',38 :: \sin.\ 86^\circ\ 14'\ 10'',1 : \sin.\ ts.$$

$$\log.\ \sin.\ 86^\circ\ 14'\ 10'',1 = 9,9990623,$$
$$\log.\ \sin.\ 45^\circ\ 11'\ 40'',38 = 9,8509547.$$
$$19,8500170.$$
$$\log.\ R = 10.$$
$$9,8500170 = \log.\ \sin.\ (ts);$$

donc $ts = 45^\circ\ 4'\ 14''$. C'est la latitude de *Turin* (n.° 189).

Il reste encore à calculer Es ; pour cela, on aura recours à l'analogie du deuxième cas (tableau I),

$$R : \cos.\ 45^\circ\ 11'\ 40'',38 :: \tang.\ 86^\circ\ 14'\ 10'',1 : \tang.\ Es.$$

$$\log.\ \cos.\ 45^\circ\ 11'\ 40'',38 = 9,8480057,$$
$$\log.\ \tang.\ 86^\circ\ 14'\ 10'',1 = 11,1818605.$$
$$21,0298662.$$
$$\log.\ R = 10.$$
$$11,0298662 = \log.\ \tang.\ Es.$$

Les tables donnent $Es = 84^\circ\ 40'$.

La

Le complément *ns* de cet arc, ou la longitude de *Turin*, est par conséquent de 5° 20'.

Par un semblable calcul, on déterminera la latitude et la longitude de tous les lieux dont on connaîtra la distance à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire. On a vu (n.° 189) comment on estime la plus courte, distance de deux lieux, quand on connaît leurs latitudes respectives, ainsi que leurs longitudes, ou seulement la différence de leurs longitudes. On peut donc facilement déduire de ces développemens, la suite des opérations qu'il faut exécuter pour estimer la longueur de l'arc de grand cercle qui passe par deux lieux de la terre, quand leurs distances à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire sont données.

Si le point *(t)* était peu éloigné du point *p*, les distances *m t*, *tp'* pourraient être regardées dans un petit espace comme des lignes droites parallèles à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire : alors la distance itinéraire *pt* serait l'hypoténuse d'un triangle rectiligne rectangle, dont *mt*, *tp'* seraient les côtés de l'angle droit ; et l'on pourrait substituer aux calculs précédens la théorie plus simple des triangles rectilignes. (*Voyez* le chap. IV.) Mais si l'on se conduisait de cette manière lorsque la distance *(pt)* est considerable, on commettrait des erreurs très-sensibles. En effet, l'arc de grand cercle qui mesure le plus court chemin entre *Paris* et *Turin*, a été trouvé (n.° 189), d'après les procédés de la trigonométrie sphérique, égal en longueur à 581790^{m}, 119, tandis que, si l'on estime la ligne *(pt)* d'après les propriétés des triangles rectangles rectilignes, on n'obtiendra pour sa valeur que 581360^{m}, 29. On indiquerait donc, dans le second cas, une distance trop petite de 429^{m}, 829 (environ $\frac{1}{1,300}$).

Rarement les Ingénieurs du cadastre auront à faire l'application de ces calculs : ils en sont dispensés par le travail de *Cassini*, dont ils ont entre les mains les résultats vérifiés. Pour rapporter les divers points remarquables des communes dont ils lèvent le plan, à la méridienne de *Paris* et à sa perpendiculaire, il leur suffit de calculer la différence qui existe entre les distances de ces points à ces deux lignes, et les distances aux mêmes axes des points les plus voisins déterminés par *Cassini*. Or cette différence est toujours assez faible pour pouvoir être considérée comme un prolongement linéaire, et par conséquent déterminée par la trigonométrie rectiligne (n.° 193).

Article VIII.

Considérations sur la Boussole.

198. Les propriétés de l'aiguille aimantée semblent, au premier coup-d'œil, offrir aux Ingénieurs un moyen exact et rapide pour tracer la méridienne d'un lieu. On sait que le fluide magnétique exerce sur le fer une action dont l'effet est d'imprimer à une aiguille de ce métal, tournant librement sur son pivot, une direction vers le pôle austral. Si cette direction était invariablement constante, la boussole serait sans doute l'instrument le plus simple et le plus favorable aux observations de la méridienne, ainsi qu'au levé des plans. Il eût suffi de s'assurer une seule fois si l'aiguille était exactement dans le plan même des méridiens, et, dans le cas contraire, d'estimer l'angle que fait le plan d'un méridien avec celui d'un grand cercle de la terre passant par les extrémités de l'aiguille. Cet angle, que l'on appelle la *déclinaison de l'aiguille*, peut être situé à la droite ou à la gauche du plan méridien; il eût donc fallu de plus reconnaître, par l'observation, si l'angle est à l'est ou à l'ouest de la méridienne.

199. Mais la boussole est loin de présenter ces avantages; le fluide magnétique éprouve dans sa marche un grand nombre de déviations dont la loi n'est pas parfaitement reconnue. On en peut juger par les résultats suivans. A *Paris*, la déclinaison était nulle en 1666; en l'an 10, elle fut observée de 23° 3': en 1804, on prescrivit aux Ingénieurs du cadastre d'orienter leurs plans, en prenant pour méridienne la ligne menée à l'est du méridien magnétique, sous un angle de 22° 10'; quelquefois l'aiguille reste stationnaire plusieurs années. La déclinaison fut de 23° depuis 1720 jusqu'à 1724. Outre ces variations annuelles, le fluide magnétique reçoit encore une déviation diurne : l'aiguille s'avance vers l'ouest le matin jusqu'à midi, et recule vers l'est dans la soirée; de manière que les diverses parties d'un plan seront diversement orientées, selon qu'elles auront été levées le matin ou le soir. Un changement subit d'état dans l'atmosphère est encore une nouvelle cause perturbatrice qui communique à l'aiguille une agitation rapide, qu'on nomme *affollemens*. Les terrains ferrugineux exercent sur elle une attraction qui la rend insensible à l'action du fluide.

Il suit de ces faits, qu'il ne convient pas d'appliquer la boussole aux

opérations géodésiques, quand on aspire à beaucoup d'exactitude, et qu'il en faut borner l'usage au levé des détails d'un plan.

Une formule assez simple peut rendre appréciables, d'une manière rigoureuse, les erreurs que l'on risque de commettre en accordant trop de confiance au procédé de la boussole, et en regardant la déclinaison de l'aiguille comme sensiblement invariable.

(*Fig. 19.*) Soit a l'angle BAp^{iv} que fait la véritable méridienne du point A avec la base $AB = b$, et $(a + d)$ l'angle BAp^{v} que fait cette même base avec la ligne Ap^{v}, menée à $22^{\circ}\ 10'$ à l'est du méridien magnétique. Soient aussi

$$\left.\begin{array}{l} m \\ p \end{array}\right\}\ \text{distance de } A \left\{\begin{array}{l} \text{à la méridienne de } \textit{Paris}, \\ \text{à la perpendiculaire.} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} m' \\ p' \end{array}\right\}\ \text{distance de } B \left\{\begin{array}{l} \text{à la méridienne de } \textit{Paris}, \\ \text{à la perpendiculaire.} \end{array}\right.$$

En appliquant au triangle rectangle BAp^{iv}, et au triangle BAp^{v}, considéré comme tel, les règles de la trigonométrie, on trouvera, dans le premier cas,

$$\left.\begin{array}{l} m' = m + \dfrac{b \sin. a}{r} \\ p' = p + \dfrac{b \cos. a}{r} \end{array}\right\},$$

et dans le second,

$$\left.\begin{array}{l} [m'] = m + \dfrac{b \sin. (a + d)}{r} \\ [p'] = p + \dfrac{b \cos. (a + d)}{r} \end{array}\right\}.$$

Estimons la différence des deux distances du point B à la méridienne de *Paris* ; on aura

$$[m'] - m' = \frac{b}{r} \{ \sin. (a + d) - \sin. a \} \ldots (1).$$

Une transformation trigonométrique, qu'il est facile de déduire des principes du chapitre I.er, donne en général,

$$(\sin. p - \sin. q) = \frac{2}{r} \cos. \tfrac{1}{2} (p + q) \sin. \tfrac{1}{2} (p - q).$$

Substituant dans cette formule $a + d$ au lieu de p, et (a) au lieu de q, l'équation (1) devient

$$[m'] - m' = \frac{2b}{r^2} \cos. \tfrac{1}{2} (2a + d) \sin. \tfrac{1}{2} d.$$

Supposons $b = 1000^m$, $a = 9°$, $d = 2°$. C'est l'un des cas où l'erreur résultant du changement de déclinaison est faible. On a

$$[m'] - m' = \frac{2000}{r^2} \cos. 10° \sin. 1°.$$

Employant les logarithmes

$$\begin{array}{rcl} \log. 2000 & = & 3,30103000, \\ \log. \cos. 10° & = & 9,99335150, \\ \log. \sin. 1° & = & 8,24185530, \\ \hline & & 21,53623680. \\ \log. r^2 & = & 20 \\ \hline & & 1,53623680 = \log. 34^m,375 ; \end{array}$$

d'où l'on voit que le point B sera indiqué sur le plan à une distance de la méridienne de *Paris*, plus grande qu'il ne faut de $34^m,375$. Cette première erreur en introduira dans la position respective de tous les autres lieux de la carte, et le plus souvent elle sera plus considérable.

CHAPITRE IV.

SUR LES OPÉRATIONS TOPOGRAPHIQUES ET LE PARCELLAIRE;

PAR M.r POMMIÉS.

200. L'ÉVALUATION de l'étendue superficielle du territoire de France est la première partie de l'immense travail que nécessite la confection d'un cadastre général. Pour arriver à cette estimation, le Gouvernement ordonna qu'il serait levé, dans toutes les communes de l'Empire, un plan de masse, dont la justesse, vérifiée d'abord par les procédés de la géométrie, serait de plus confirmée par la déclaration des propriétaires : mais la plupart, ne connaissant que par approximation la véritable contenance de leurs terres, n'ont fourni d'ailleurs que très-lentement les titres qu'ils devaient produire, aux termes des réglemens et des lois ; de manière que leurs renseignemens, ou trop vagues ou trop tardifs, loin d'éclaircir aucun doute, ont élevé des obstacles aux progrès de l'opération, par la difficulté de les accorder avec les résultats de l'arpentage. Les différences étaient quelquefois trop notables pour que l'on négligeât d'y avoir égard; et la preuve d'une erreur réelle, trop peu authentique pour que, d'après ce seul témoignage, on puisse légitimement accuser de précipitation les Géomètres et leurs adjoints. Tant d'oppositions auraient infailliblement rendu vains les essais tentés depuis plusieurs années pour réaliser le projet du cadastre de France, conçu par l'Assemblée constituante, ordonné par son décret du 28 août 1791, et suspendu pendant les longs orages de la révolution, pour laisser à ce siècle si fécond en vastes conceptions la gloire d'exécuter cette grande entreprise. Il fallut donc lever les difficultés, et, dans cette vue, affranchir les opérations des Ingénieurs de l'épreuve incertaine fondée sur les aveux des propriétaires, en rendant ces derniers les coopérateurs plutôt que les juges des Géomètres, et en prenant pour guide leurs indications mêmes, et la circonscription de leurs propriétés respectives pour les limites linéaires d'autant de plans partiels.

Les avantages du parcellaire sur les simples plans de masse ont été sentis et réclamés par les habitans des campagnes, qui accordent aux plans

terriers une confiance d'autant plus grande, qu'ils peuvent en apprécier l'exactitude. Ils espèrent, avec raison, trouver désormais dans le dépôt des archives de leur mairie, des pièces susceptibles d'être consultées au besoin par les tribunaux, pour éviter les longues contestations qui s'élèvent souvent entre les voisins sur la circonscription de leurs champs, et pour éviter une foule de procès ruineux : ils aperçoivent mieux aussi le moyen par lequel le Gouvernement doit parvenir à exercer, dans la fixation des impôts, une justice rigoureusement distributive. Leur commun assentiment s'est fait particulièrement remarquer par les vœux que le Ministre des finances a recueillis, lorsqu'il a consulté dernièrement sur cette matière les conseils municipaux des communes. Pour satisfaire un desir si généralement manifesté, le Gouvernement a mis en vigueur les deux lois du 28 août et du 23 septembre 1791, qui autorisent le levé des plans de détail par-tout où cette opération est reconnue nécessaire pour la juste répartition des contributions foncières. Cette nouvelle décision a modifié dans quelques parties les dispositions précédemment adoptées par le Ministre, relativement aux plans de masse, et a donné lieu aux instructions du 1.er décembre 1807 et du 20 avril 1808; elles sont rapportées à la tête du Manuel, et ce quatrième chapitre sera consacré à présenter les développemens que nécessite l'exécution de ces arrêtés.

201. Les diverses opérations qu'ils prescrivent, énoncées dans l'ordre où elles doivent se succéder, composent les onze articles suivans :

1.° La Délimitation et la Division du territoire en sections;
2.° La Triangulation de la commune;
3.° Le Levé du plan linéaire;
4.° Le Levé du plan parcellaire;
5.° Le Tableau indicatif des propriétaires et des propriétés;
6.° La Vérification;
7.° Le Calcul des plans et des propriétés;
8.° Le Tableau indicatif des propriétaires, des propriétés et de leurs contenances;
9.° Les Bulletins des propriétaires;
10.° L'Atlas et le Tableau d'assemblage;
11.° Le Dessin des plans.

Les cinq premiers articles concernent principalement les Géomètres du cadastre et les Arpenteurs adjoints; les cinq autres forment les attributions spéciales de l'Ingénieur-vérificateur, et le onzième est commun aux Ingénieurs-vérificateurs et aux Géomètres du cadastre.

§. I.

Délimitation et Division du Territoire en sections.

202. Les Géomètres du cadastre pourront consulter, relativement à cette disposition préparatoire, le titre III de la seconde partie du développement des Instructions *(page xvij)* : ils dresseront, ensuite de cette double opération, un procès-verbal conforme au modèle ci-après ; mais ils devront en différer la rédaction définitive jusqu'après la confection du plan linéaire, afin qu'en acquérant pendant la durée de ce travail une connaissance plus parfaite des localités, ils fassent le meilleur choix possible des chemins, rivières et autres tenans immuables, qui doivent servir à marquer la division des sections.

203. L'étendue de chaque section sera déterminée par le Géomètre du cadastre, en raison de la multiplicité des détails : elles seront désignées sur les plans par des lettres majuscules, et distinguées par le nom de l'objet le plus remarquable qui s'y trouvera renfermé. Leur surface moyenne doit être environ de 300 arpens métriques ; mais quand les dispositions du terrain exigeront qu'elles en renferment un plus grand nombre, et que les Géomètres procéderont à la confection de l'atlas, ils devront partager les sections de manière que chacune de leurs sous-divisions puisse être représentée sur une feuille de papier grand-aigle.

204. S'il s'élève des contestations entre les maires sur les limites de leurs communes respectives, les Ingénieurs devront se conformer à la lettre du Ministre de l'intérieur, du 13 mars 1806, et à celle du 7 août même année, dans laquelle le Ministre des finances trace aux Géomètres du cadastre la conduite qu'ils doivent observer désormais, lorsqu'ils auront reconnu l'utilité de quelques changemens dans la circonscription actuelle des communes. (Ces deux lettres sont transcrites dans la collection des Instructions, *tome IV, pages 29 et 36.*)

PROCÈS-VERBAL

De Délimitation du Territoire de la Commune de et de sa Division en Sections.

AUJOURD'HUI le du mois d an de l'Empire français, nous, Ingénieur-vérificateur du cadastre, nommé par le Ministre des finances, pour procéder, conformément à son Instruction du 1.er décembre 1807, à la reconnaissance de la ligne de circonscription de la commune d et à la division du territoire de cette commune en sections, nous sommes transportés, accompagnés du contrôleur des contributions directes, au chef-lieu, en la mairie, où nous avons trouvé M. maire de ladite commune, et MM. adjoints, et indicateurs nommés par lui, ainsi que les maires, adjoints et indicateurs des communes ci-après désignées, convoqués et rassemblés pour constater contradictoirement la démarcation du territoire d

Arrivés sur le terrain, nous avons choisi pour point de départ, celui du périmètre de la commune d qui, se trouvant le plus au nord, sert de séparation aux territoires des deux communes d et et nous avons parcouru la ligne de circonscription, en allant du nord à l'est, puis au sud et à l'ouest, ayant toujours à notre droite le territoire d et à notre gauche, successivement ceux d et ainsi qu'il suit :

ARTICLE I.er

Limites avec

Partant d'une croix de pierre, appelée la croix d située au nord de la commune d sur la rive gauche de la rivière d à la séparation d'une pièce de pré appartenant à d'avec une autre pièce de pré du domaine d nous avons reconnu, d'après l'indication du maire et des indicateurs d et en présence du maire et des indicateurs d que la ligne qui sépare ces deux territoires se dirige directement de ladite croix vers un angle rentrant sur le territoire d à l'extrémité d'une pièce de terre labourable appartenant à où nous avons fait planter une borne ayant les dimensions exigées par l'arrêté du préfet d

et

et portant le n.° 1, laquelle borne est distante de ladite croix de mètres, et forme le sommet d'un angle d degrés minutes.

De la borne n.° 1, la ligne séparative se dirige directement vers un angle saillant sur le territoire d à l'extrémité d'une pièce de terre labourable appartenant à située sur la gauche du chemin vicinal qui conduit d à où nous avons fait planter une borne portant le n.° 2, distante de mètres de celle n.° 1, et correspondant par une ligne sinueuse à la borne n.° 3.

De la borne n.° 2, la ligne de démarcation est formée par le chemin vicinal qui conduit d à sur une longueur de mètres, y compris les sinuosités jusqu'à l'extrémité d'une pièce de terre labourable appartenant à où nous avons fait planter une borne portant le n.° 3, et correspondant par une ligne sinueuse à la borne n.° 2, et par une ligne droite à la borne n.° 4.

De la borne n.° 3, la ligne séparative se dirige directement vers un angle saillant sur le territoire d à l'extrémité d'une pièce de terre labourable appartenant à où nous avons fait planter une borne portant le n.° 4, distant de mètres de celle n.° 3, et formant le sommet d'un angle de degrés minutes.

De la borne n.° 4, la ligne de démarcation se dirige directement sur un buisson d'épines, appelé *le buisson* planté à l'extrémité d'un pré appartenant à distant de mètres de la borne n.° 4.

Dudit buisson appelé la ligne séparative est formée par un orle très-apparent le long des prairies; lequel orle décrit une ligne courbe rentrante sur le territoire d et dont l'extrémité va aboutir à la pointe de la forêt dite Vers le milieu de cette courbe et à l'extrémité d'un pré appartenant à nous avons fait planter une borne portant le n.° 5, et distante de mètres du buisson sus-énoncé.

Parvenus à la pointe de la forêt dite distante de la borne n.° 5 de mètres, il a été reconnu que cette pointe séparait le territoire d de celui d au levant, et de celui d au midi. En conséquence, nous y avons fait planter une borne portant le n.° 6, et nous avons clos cette partie de notre procès-verbal, que le maire d le maire d ainsi que les indicateurs de chacune

de ces communes, ont signé avec le maire et les indicateurs d

Le Maire et les Indicateurs d | *Le Maire et les Indicateurs d*

Le Maire et les Indicateurs d

ARTICLE II.

Limites avec

Partant de la borne n.° 6, ci-dessus désignée, nous avons ensuite reconnu, d'après l'indication des maires, adjoints et indicateurs des communes d et d que la ligne qui sépare ces deux territoires au levant de la commune d se dirige directement de ladite borne vers un angle saillant sur le territoire d &c.

(Détail semblable à celui de la première commune.)

ARTICLE III.

Limites avec

(Même détail.)

ARTICLE IV.

Limites avec

Partant de la borne n.° 15, ci-dessus désignée, nous avons reconnu, d'après l'indication des maires, adjoints et indicateurs des communes d et d que la ligne de démarcation de ces deux territoires est formée dans toute sa longueur à l'ouest de la commune d par le lit de la rivière d à partir de ladite borne n.° 15, jusqu'à la croix de pierre appelée (située sur la rive gauche de ladite rivière), qui sépare le territoire d de celui d qu'en conséquence il n'y avait pas lieu à planter des bornes séparatives des territoires d et d

Nous avons terminé en cet endroit la reconnaissance des limites de la commune d et avons clos notre procès-verbal, que le maire d le maire d ainsi que les indicateurs, ont signé.

Le Maire et les Indicateurs d | *Le Maire et les Indicateurs d*

Le Maire et les Indicateurs d

Division de la Commune en sections.

Immédiatement après la reconnaissance du périmètre et délimitation du territoire de la commune d   nous avons, conformément à l'Instruction du Ministre des finances du 1.er décembre, art. 10, procédé, de concert avec le maire de ladite commune et le contrôleur des contributions directes, à la reconnaissance et à la division définitive de ce territoire en sections, dont la première sera désignée par la lettre *A;*

La deuxième, par la lettre *B;*

La troisième, par la lettre *C;*

La quatrième, par la lettre *D.*

Et pour que cette division ne puisse être exposée à des variations qui apporteraient de la confusion dans les opérations dont elle doit être la base, nous déclarons par la présente délibération, que la section *A* est la portion du territoire de la commune, qui est limitée, savoir,

Au nord, par

Au levant, par

Au midi, par

Et au couchant, par

La section *B* est la portion de son territoire qui est limitée, savoir;

La section *C*

La section *D*

Et sera la présente délibération déposée au secrétariat de la mairie, pour être communiquée aux propriétaires et habitans de la commune, à ce qu'aucun ne puisse en prétendre cause d'ignorance; et une copie restera dans les mains du contrôleur.

Fait à   le

Le Maire,   *L'Ingénieur-vérificateur,*

Le Contrôleur,

§. II.

De la Triangulation des Communes.

205. On se propose, par cette première opération, de déterminer la distance et la position respectives de plusieurs points fixes et remarquables, choisis convenablement sur la surface du terrain que l'on doit lever, et sur le territoire des communes environnantes. Pour exécuter ce travail préliminaire, il faut commencer par établir une base, aux extrémités de laquelle on rattachera tous les signaux qu'il sera possible d'observer de ces deux stations. Si leur nombre n'est pas suffisant, les côtés de ces premiers triangles pourront être employés à leur tour comme bases nouvelles, et serviront ainsi à lier, dans le système général, les objets de mire qui ne se découvrent que successivement à la vue.

206. Une triangulation bien faite est le guide le plus sûr que doive suivre le Géomètre du cadastre, en levant les plans parcellaires; il convient donc de multiplier les moyens de reconnaissance, et de porter au moins à dix le nombre des sommets où se réunissent les rayons visuels du réseau triangulaire qui couvre un espace de mille arpens métriques. On conçoit donc que la triangulation ne saurait devenir le garant et la preuve des autres constructions topographiques, à moins que le Géomètre n'ait apporté la plus grande rigueur dans ses observations angulaires et dans ses calculs trigonométriques. Les paragraphes II, III, IV, V du chapitre précédent, présentent, avec les développemens nécessaires, la description et l'usage des instrumens employés dans la mesure des angles et des bases, ainsi que les corrections auxquelles il est utile d'avoir égard, lorsque les élémens de l'observation ne conduisent pas immédiatement à des triangles tracés sur un plan horizontal. Je n'ajouterai ici qu'une seule remarque : l'intersection de deux rayons visuels dirigés sur un même point, suffit en géométrie pour fixer sa position relativement à la ligne droite qui joint les lieux d'observation; mais on conçoit que si le Géomètre a négligé quelques sous-divisions du cercle, en lisant sur le limbe la valeur des angles, cette erreur éloignera le point observé de sa vraie place dans le rapport graphique, sans que l'Ingénieur ait à sa disposition aucun moyen d'apercevoir cette déviation et de la rectifier. Pour éviter d'arrêter sur le plan des points douteux, il faut se transporter à l'intersection des rayons visuels, y mesurer

l'angle qu'ils font entre eux, et vérifier s'il est en effet le supplément des deux autres angles connus. Lorsque cette preuve est difficile ou impossible, on peut y substituer un nouveau rayon visuel dirigé vers le même point, d'une troisième station déjà déterminée ; car il est évident que le concours des trois lignes en un point unique cessera d'avoir lieu, si l'une d'elles est tracée sur le plan sous un angle différent de celui du terrain.

207. Il y a plusieurs départemens entièrement couverts de forêts, d'autres où les propriétés sont entourées de fossés, de buissons et de haies fort élevées : alors la triangulation devient impraticable, et le Géomètre devra se borner, dans ces pays, à chaîner de grandes lignes formant, par leur rencontre, les polygones qui serviront à renfermer les détails. Il sera utile de confirmer souvent par des calculs trigonométriques les résultats des mesures directes, afin de corriger par le grand nombre de ces vérifications l'imperfection du procédé.

208. Quand la triangulation d'une commune est terminée, ou bien, à son défaut, quand les grands polygones sont établis, il reste encore à rapporter sur le plan le sommet de tous ces angles ; mais, pour tracer les lignes qui les déterminent par leur intersection, il faut employer le rapporteur, dont l'usage est assujetti à beaucoup d'inconvéniens : d'une autre part, les rencontres de ces droites (dans leur tracé graphique) différeront d'autant plus du point mathématique, que leurs angles s'éloignent davantage de l'angle droit. On évite la plupart de ces difficultés pratiques, en calculant la distance des points de la triangulation à deux axes rectangulaires se coupant au chef-lieu de la commune. L'un de ces axes est la *méridienne* du lieu ; et le second, une *perpendiculaire* à la méridienne.

209. Toutes les Instructions publiées jusqu'ici par le Ministre ont exigé le rattachement des plans des communes aux grands triangles de *Cassini ;* mais M. *Delambre*, consulté sur cet objet dans la séance du 13 novembre 1807, a pensé que les Géomètres du cadastre ne retireraient qu'un médiocre avantage de ce rattachement, à moins que le Ministre, ordonnant la continuation des travaux de *Cassini*, ne prescrivît de proceder aux parcellaires qu'après avoir fait rectifier ou terminer les triangles de second et de troisième ordre. Cette opération délicate, desirée par les Géomètres, aurait en effet rendu d'utiles services à la géographie ; mais elle exigeait une dépense considérable de temps et d'argent, et reculait

l'époque où le Ministre a l'intention de faire jouir les contribuables des bienfaits d'un cadastre général. Son Excellence a donc résolu de ne demander aux Ingénieurs que les seules opérations d'arpentage susceptibles de conduire à la connaissance exacte de l'étendue superficielle de chaque propriété; et pour cela il suffit de rapporter les points de la triangulation des communes à la méridienne des chefs-lieux, sans étendre ce rapport à la méridienne qui passe par l'Observatoire de *Paris.*

210. Toutefois on engage les Ingénieurs du cadastre à donner ces dernières distances, dont la construction des cartes peut tirer un parti avantageux, et à consulter, pour offrir ces renseignemens, soit les Bulletins corrigés de *Cassini*, soit les articles VI et VII du chapitre précédent.

Je vais compléter ce que j'ai déjà exposé dans l'article VI, *p. 137*, sur les calculs qu'il faut exécuter pour rapporter les points principaux d'une carte topographique à la méridienne du chef-lieu et à sa perpendiculaire. La position de ces points entre eux étant déterminée par le système de la suite de triangles qui composent la triangulation, il ne reste plus qu'à observer la direction de la méridienne Mm, et de sa perpendiculaire Pp, soit par le moyen de la boussole, soit par l'un des procédés indiqués *art. II*, puis à estimer les angles ACp, BAO, que font avec la perpendiculaire le côté AC de l'un des triangles calculés et la base mesurée AB. (Voy. la *fig. 22, pl. 8.*) Ces élémens étant obtenus, on connaît, dans le triangle rectangle ACp, l'hypoténuse AC et l'angle ACp; d'où l'on peut déduire les distances Am et Ap. Soient $Am = m$, $Ap = p$ et l'angle $BAO = \varphi$. Proposons-nous d'estimer les distances Bm, Bp, du point B aux deux axes Mm, Pp. On a

$$Bm = Am + Ao; \quad Bp = Ap + Bo.$$

Le triangle rectangle BAO, dont l'hypoténuse $AB = a$, donne

$$AO = AB \cos. BAO = a \cos. \varphi; \quad BO = AB \sin. BAO = a \sin. \varphi.$$

Substituant ces expressions de AO et de BO dans les deux premières équations, ainsi que pour Am et Ap leurs valeurs m, p, on a enfin les distances cherchées :

$$(1)\ Bm = m + a \cos. \varphi; \quad (2)\ Bp = p + a \sin. \varphi.$$

La grandeur donnée de la ligne AB, et la connaissance de l'angle qu'elle fait avec la perpendiculaire Pp, ne suffisent pas pour fixer la position de

cette base, et par conséquent celle du point B : en effet, la droite AB peut affecter indifféremment l'une des quatre directions AB, AB', Ab, Ab', sans changer de longueur, et en faisant toujours avec la perpendiculaire Pp l'angle φ. Cependant les distances des points B, B', b, b', par rapport aux lignes Mm, Pp, varient de grandeur et de position ; il est donc nécessaire de rechercher quelles sont les modifications que doivent subir les équations qui expriment ces distances dans chacun des quatre cas qui se présentent.

Pour cela, je regarderai comme positives toutes les lignes élevées perpendiculairement au-dessus de l'axe Pp, et par conséquent il faudra regarder comme négatives celles qui se dirigeront au-dessous avec la même inclinaison ; et en se servant des signes consacrés par les Géomètres, on affectera les premières lignes du signe $+$, et les secondes du signe $-$: on considérera de même comme positives les lignes élevées perpendiculairement à Mm dans le sens AP, et l'on prendra négativement celles qui seront tracées dans le sens contraire CB'. Je supposerai, de plus, que la base AB, dans le mouvement qu'elle a reçu pour arriver aux quatre stations successives AB, AB', Ab, Ab', était d'abord confondue avec AO. Cela posé, les quatre angles que la ligne mobile AB peut faire avec la droite invariable AO, seront exprimés de la manière suivante :

$$BAO = 0 + \varphi ; \qquad bAO = 180^\circ + \varphi ;$$
$$B'AO = 180^\circ - \varphi , \qquad b'AO = 360^\circ - \varphi .$$

Dans le premier cas, sin. φ et cos. φ sont tous deux positifs ; dans le second, sin. φ est positif, et cos. φ négatif ; dans le troisième, sin. φ et cos. φ sont négatifs ; dans le quatrième enfin, sin. φ est négatif, mais cos. φ est positif.

En appliquant ces considérations aux équations (1) et (2), elles deviennent,

Pour l'angle $BAO = 0 + \varphi \begin{cases} Bm = m + a \cos. \varphi , \\ Bp = p + a \sin. \varphi , \end{cases}$ P.r $bAO = 180^\circ + \varphi \begin{cases} bm = m - a \cos. \varphi ; \\ bp = p - a \sin. \varphi ; \end{cases}$

Pour l'angle $B'AO = 180^\circ - \varphi \begin{cases} B'm = m - a \cos. \varphi , \\ B'p = p + a \sin. \varphi , \end{cases}$ P.r $b'AO = 360^\circ - \varphi \begin{cases} b'm = m + a \cos. \varphi , \\ b'p = p - a \sin. \varphi . \end{cases}$

Le troisième Tableau qui termine cet article, présente des applications de ces formules.

211. Les observations angulaires, la mesure des lignes et les calculs que nécessite la triangulation des communes, peuvent être consignés sur

des registres que j'offre ici pour modèles, et dont il me reste à faire connaître la disposition : ils se rapportent à la *figure 23.*

Registre [n.° 1.]

Ce registre est destiné à recevoir toutes les observations nécessaires à la formation du canevas trigonométrique prescrit par l'article I.er de l'Instruction du 1.er décembre 1807. Il est divisé en quatre colonnes principales : la première a pour titre, *lieu de l'observation ;* elle est en effet consacrée à recevoir l'indication précise du lieu où s'est faite la station : la seconde porte pour titre, *objets observés ;* elle est sous-divisée en trois autres colonnes secondaires, dont l'une contient les lettres particulières par lesquelles on désigne chaque objet qu'on est dans l'intention d'observer, l'autre renferme le nom de la commune sur le territoire de laquelle sont situés ces objets, et dans la dernière on indique leur nature : la troisième colonne principale marque par les lettres initiales *d, g,* des mots *droite, gauche,* de quel côté l'alidade mobile de l'instrument était dirigée par rapport à l'alidade fixe : enfin la quatrième reçoit le nombre de degrés et minutes qui mesurent chacun des angles observés.

212. On remarquera que dans ce Tableau l'on ne rappelle pas l'objet sur lequel on suppose l'alidade immobile fixée. La position de ce rayon visuel est en effet indifférente ; il suffit de s'assurer que, pendant le cours des observations, il n'a pas dévié de sa direction primitive : et rapportant alors à cette direction arbitrairement choisie toutes les lignes observées, on obtiendra facilement, par de simples additions ou soustractions, l'angle que forment entre eux deux rayons quelconques. Cette manière d'estimer les angles fournit un procédé commode pour les vérifier : il suffit en effet de changer le lieu de l'alidade fixe, puis d'observer une seconde fois les mêmes signaux ; on doit arriver à des résultats identiques avec ceux de la première opération. On parvient aussi, par ce moyen, à corriger l'angle de parallélisme qui existe presque toujours dans les instrumens destinés à la mesure des angles.

Registre [n.° 2.]

213. Il est intitulé *Système triangulaire,* et présente les détails de calculs qui conduisent à la connaissance complète des diverses parties de tous les triangles du canevas trigonométrique. Ce registre est divisé en quatre colonnes : la première désigne les sommets de chaque triangle, et la nature des objets qui ont servi de signaux ; la seconde renferme les résultats puisés dans

dans le registre précédent, au-dessous les deux proportions que fournissent les combinaisons de ces données, et dont le calcul du quatrième terme doit faire obtenir la longueur des deux côtés inconnus de chaque triangle; dans la troisième colonne sont inscrites les opérations auxquelles ces deux proportions conduisent; et la dernière enfin présente à part la grandeur des côtés que l'on vient de calculer.

Registre [n.° 3.]

214. Il porte le titre de *Système rectangulaire*, parce qu'il expose les détails du calcul qu'il a fallu entreprendre pour rapporter tous les points de la triangulation à la méridienne et à la perpendiculaire du chef-lieu, ainsi qu'à la méridienne et à la perpendiculaire de *Paris*. Trois colonnes se partagent le tableau; l'une reçoit la lettre qui désigne le point dont on cherche les distances à la méridienne et à la perpendiculaire; la deuxième offre l'ensemble des calculs : d'un côté, on lit les quantités connues et nécessaires à la résolution du problème; par exemple, la distance du point que l'on considère à un autre point déjà donné de position, ainsi que l'angle que la ligne qui les joint fait avec la perpendiculaire : à la droite sont écrites les équations qu'il faut résoudre, et au-dessous les opérations logarithmiques que ce travail exige. La dernière colonne, partagée en quatre divisions, donne les distances cherchées, et précédées du signe + ou du signe —, pour indiquer, d'après les conventions exposées ci-dessus, la région où ces distances sont situées. Les deux premières divisions sont remplies immédiatement par les résultats des calculs consignés dans la deuxième colonne; ceux qui sont inscrits dans les deux autres, sont extraits des bulletins de *Cassini*, ou obtenus par les opérations exposées *(ch. III, art. VII)*.

Registre [n.° 4.]

215. Ce dernier registre est le seul demandé par les Instructions du Ministre; il n'est qu'une récapitulation des trois précédens, dans lesquels on puisera tous les résultats qui doivent remplir ses diverses colonnes. Si l'Ingénieur n'a pas cherché les distances des points trigonométriques à la méridienne de *Paris*, il substituera aux deux colonnes qui les contiennent, les distances de ces points à la méridienne du chef-lieu; si, au contraire, il peut fournir l'une et l'autre estimation, il tracera quatre colonnes conformes à celles du troisième registre.

[N.° 1.] **REGISTRE DES OBSERVATIONS**

faites sur le Terrain ;

SAVOIR :

La base est dans la direction du sud-ouest au nord-est. Elle fait avec la méridienne un angle de 39° 10′, et sa longueur est de 1035^{m}. L'extrémité la plus au nord est située dans un pré appartenant à   et l'autre extrémité dans une pièce de terre labourable appartenant à

LIEU de L'OBSERVATION.	OBJETS OBSERVÉS.			SENS de l'observ.	ANGLES.	
	Lettres.	COMMUNES.	NATURE DE L'OBJET.			
A Extrémité la plus au sud de la base.	*G*	D'Estivals....	Arbre dit d'Estivals............	droite.	32°	4′
	E	De Ferrières..	Signal des âges..............	d.	61.	30.
	F	De Ferrières..	Signal près de la limite de Nadaillac.	d.	143.	35.
	H	De Ferrières..	Clocher du chef-lieu..........	gauche.	10.	44.
	C	De Chartriers.	Signal du Coudonné...........	g.	16.	10.
	B	De Ferrières..	Extrémité la plus au nord de la base.	g.	47.	25.
Seconde observation des mêmes points, après avoir changé la première direction de l'alidade immobile.	*G*	....	....	d.	19.	45.
	E	....	....	d.	49.	11.
	F	....	....	d.	131.	16.
	H	....	....	g.	23.	3.
	C	....	....	g.	28.	29.
	B	....	....	g.	59.	44.
B Extrémité la plus au nord de la base.	*D*	De Ferrières..	Signal près de Broussoles........	d.	8.	12.
	H	....	....	d.	18.	36.
	A	....	....	d.	68.	36.
	G	....	....	g.	4.	51.
	C	....	....	g.	50.	17.
Seconde observation des mêmes points, destinée à vérifier les résultats de la première.	*D*	....	....	d.	3.	22.
	H	....	....	d.	13.	46.
	A	....	....	d.	63.	46.
	G	....	....	g.	9.	41.
	C	....	....	g.	55.	7.
C	*A*	....	....	d.	20.	38.
	B	....	....	d.	50.	30.
	D	....	....	g.	14.	9.
	G	....	....	g.	56.	21.
	A	....	....	d.	15.	28.
	B	....	....	d.	45.	20.
	D	....	....	g.	19.	1.
	G	....	....	g.	61.	31.

[N.° 2.]

SYSTÈME TRIANGULAIRE.

DÉPARTEMENT
d

ARROND.[t] COMM.[al]
d

CANTON d

REGISTRE des Triangles et de leur Calcul, devant servir au Levé du Plan linéaire de la Commune d

SAVOIR:

TRIANGLES.	PARTIES DONNÉES PAR L'OBSERVATION.	CALCUL DES CÔTÉS.	CÔTÉS CALCULÉS.
A Extrémité sud de la base. *B* Extrémité nord de la base. *C* Signal du Coudonné.	*A* = 31° 15′ *B* = 118. 53. *C* = 29. 52. *AB* = 1035[m] *PROPORTIONS.* Sin. 29. 52 : 1035 :: {Sin. 31. 15 : *BC*. / Sin. 118. 53 : *AC*.	Log........ 1035. = 3,01494. Log. sin..... 31. 15 = 9,71498. Com. log. sin. 29. 52 = 0,30279. Log. *BC* = 3,03271. Log........ 1035. = 3,01494. Log. sin..... 118. 59 = 9,94231. Com. log. sin. 29. 52 = 0,30279. Log. *AC* = 3,26004.	*BC* = 1078. *AC* = 1820.
A *B* *H* Chef-lieu.	*A* = 36. 41. *B* = 50. ״ *H* = 93. 19. *AB* = 1035. *PROPORTIONS.* Sin. 93. 19 : 1035 :: {Sin. 36. 41 : *BH*. / Sin. 50. ״ : *AH*.	Log........ 1035. = 3,01494. Log. sin..... 36. 41 = 9,77626. Com. log. sin. 93. 19 = 0,00073. Log. *BH* = 2,79193. Log........ 1035. = 3,01494. Log. sin..... 50. ״ = 9,88425. Com. log. sin. 93. 19 = 0,00073. Log. *AH* = 2,89992.	*BH* = 619. *AH* = 794.
B *C* *D* Signal de Broussoles.	*B* = 58. 29. *C* = 64. 21. *D* = 57. 10. *BC* = 1078. *PROPORTIONS.* Sin. 57. 10 : 1078 :: {Sin. 58. 29 : *CD*. / Sin. 64. 21 : *BD*.	Log........ 1078. = 3,03271. Log. sin..... 58. 29 = 9,93069. Com. log. sin. 57. 10 = 0,07559. Log. *CD* = 3,03899. Log........ 1078. = 3,03271. Log. sin..... 64. 21 = 9,95474. Com. log. sin. 57. 10 = 0,07559. Log. *BD* = 3,06324.	*CD* = 1094. *BD* = 1157.

[N.° 3.]

DÉPARTEMENT
d

ARROND.t COMM.al
d

CANTON d

SYSTÈME RECTANGULAIRE.

REGISTRE des Calculs à faire pour rapporter tous les points de la Commune d à la méridienne du chef-lieu, à celle de Paris, *et à leurs perpendiculaires.*

POINTS dont on cherche les distances.	DÉTAILS DU CALCUL.	DISTANCE DE CHAQUE POINT À LA			
		Mérid. du chef-l.	Perp. du chef-l.	Mérid.ne de Paris.	Perpendic. de Paris.
A Extrémité sud de la base.	*Quantités connues.* — $AH = 794^m$, et fait avec la perpendiculaire un angle de $180° + 14° 9'$. *Équations qui en résultent.*				
	$AM = -AH$ cos. $14° 9' = -770 =$	$-770.$	.....	$-71834.$	
	$AP = -AH$ sin. $14 9 = -194 =$	.....	$-194.$	....	$-420744.$
	CALCULS DE *AH* cos. 14° 9': Log..... 794 = 2,89982. Log. cos. 14° 9' = 9,98662. Log..... 770 = 2,88644. *AH* sin. 14° 9': Log..... 794 = 2,89982. Log. sin. 14° 9' = 9.38821. Log..... 194 = 2,28803.				
B Extrémité nord de la base.	*Quantités connues.* — $AB = 1035^m$, et fait avec la perpendiculaire un angle de $0 + 50° 50'$. *Équations qui en résultent.*				
	$BM = AM + AB$ cos. $50° 50' = -770 + 654 =$	$-116.$	.....	$-71180.$	
	$BP = AP + AB$ sin. $50 50 = -194 + 802 =$	.....	$+608.$	....	$-419942.$
	CALCULS DE *AB* cos. 50° 50': Log..... 1035 = 3,01494. Log. cos. 50° 50' = 9,80043. Log..... 654 = 2,81537. *AB* sin. 50° 5': Log..... 1035 = 3,01494. Log. sin. 50° 50' = 9,88948. Log..... 802 = 2,90442.				
C Signal près du Coudonné	*Quantités connues.* — $AC = 1820^m$, et fait avec la perpendiculaire un angle de $0 + 19° 35'$. *Équations qui en résultent.*				
	$CM = AM + AC$ cos. $19° 35' = -770 + 1715 =$	$+945.$	.....	$-70119.$	
	$CP = AP + AC$ sin. $19 35 = -194 + 610 =$	.....	$+416.$	....	$-420134.$
	CALCULS DE *AC* cos. 19° 35': Log..... 1820 = 3.26007. Log. cos. 19° 35' = 9.97412. Log..... 1715 = 3.23419. *AC* sin. 19° 35': Log..... 1820 = 3.26007. Log. sin. 19° 35' = 9.52527. Log..... 610 = 2.78534.				

[N.° 4.]

DÉPARTEMENT
d

ARROND.t COMM.al
d

CANTON d

REGISTRE DE CALCULS.

Opérations trigonométriques faites pour le levé du Plan du territoire de la Commune d . par M. Géomètre du Cadastre.

DÉSIGNATION des Triangles.	VALEUR des Angles.	EXTRÉMITÉS des côtés.	LONGUEUR des côtés en mètres.	DISTANCES EN MÈTRES à la méridienne de Paris.	DISTANCES EN MÈTRES à la perpendic.re menée sur la méridienne de Paris.	OBSERVATIONS.
A Extrémité sud de la base.	31° 15′ 0″	*B* en *C*	1078.	71834.	420744.	Le rayon de la tour de Chavagnac fait avec *AB* un angle de 81° 57′.
B Extrémité nord de la base.	118. 53. 0.	*A* en *C*	1820.	71180.	419942.	
C Signal du Coudonné.	29. 52. 0.	*A* en *B*	1035.	70119.	420134.	
A	36. 41. 0.	*B* en *H*	619.	71834.	420744.	Le point *C* de ce canevas correspond au point *K* de celui de Chartriers.
B	50. 00. 0.	*A* en *H*	794.	71180.	419942.	
H Chef-lieu.	93. 19. 0.	*A* en *B*	1035.	71064.	420550.	
B	58. 29. 0.	*C* en *D*	1094.	71180.	419942.	
C	64. 21. 0.	*B* en *D*	1157.	70119.	420134.	
D Signal de Broussoles.	57. 10. 0.	*B* en *C*	1078.	79701.	421020.	

§. III.

Du Plan linéaire.

216. Lorsque la triangulation de la commune est terminée, et que le Géomètre a rassemblé dans les tableaux précédens tous les élémens qu'il a obtenus par l'observation, et les résultats qu'il a déduits du calcul, il doit procéder à la confection du plan linéaire, dont l'objet est clairement exprimé dans les articles 1 et 2 de l'Instruction du 1.er décembre.

217. Ce plan peut être regardé comme la minute du plan de masse de la commune, et le canevas des opérations préliminaires, dont la justesse assure celle des détails du parcellaire : il expose d'abord, relativement à la méridienne, la position respective de tous les points de la triangulation, et présente de plus la circonscription du territoire, sa division en sections, les rivières et les forêts impériales. Ce canevas pourra être tracé immédiatement sur les plans parcellaires, lorsque ceux-ci devront tous être levés à la même échelle; mais la variété infinie des terrains, et le grand nombre des propriétés particulières qui se partagent la surface de la plupart des communes, ne permettent de supposer cette possibilité que dans un petit nombre de cas : d'ailleurs, le Géomètre retirera tant d'avantages d'un plan linéaire séparé, que son exécution me semble indispensable à la formation de l'Atlas demandé par le Ministre. Il servira de minute au tableau d'assemblage qui doit précéder chacun de ces Atlas; seulement il suffira de l'établir sur l'échelle de 1 à 10000, ou même de le restreindre à celle de 1 à 20000, selon les cas prévus par l'article 3 de l'Instruction du 1.er décembre. Il facilitera la rédaction du second cahier des calculs de contenance et la vérification de l'Ingénieur en chef : enfin ce plan lui sera sur-tout utile pour dresser les feuilles de développement sur les diverses échelles qu'exigent les localités.

218. Le plan linéaire sera généralement construit sur l'échelle de 1 à 5000; le Géomètre partagera l'étendue de la feuille de papier qui doit le recevoir, en carrés d'un décimètre de base sur un décimètre de hauteur, par des lignes parallèles menées du sud au nord et de l'est à l'ouest. Il désignera chacune des colonnes formées par les premières lignes, à l'aide de la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, &c., et chacune des

zones horizontales déterminées par les secondes, au moyen des lettres *A*, *B*, *C*, &c.; de manière que les divers carrés A^1, A^2, A^3, &c. B^1, B^2, B^3, &c. seront ainsi distingués les uns des autres par la combinaison du caractère littéral et du signe numérique correspondant à chacun d'eux. *(Fig. 24.)*

219. Le Géomètre placera ensuite le chef-lieu de la commune à l'intersection de deux de ces parallèles, qu'il choisira d'après l'éloignement plus ou moins considérable des points extrêmes de sa triangulation. Ces deux parallèles représenteront, l'une la méridienne du chef-lieu, l'autre la perpendiculaire à cette méridienne; et c'est à ces deux axes qu'il rapportera sur la carte toutes les distances rassemblées dans le tableau (3 ou 4). Pour exécuter ce rapport, on observera que, d'après l'échelle adoptée, un décimètre sur le plan exprime 500 mètres sur le terrain; et par conséquent, que tous les points du terrain qui sont distans de la méridienne et de sa perpendiculaire d'un multiple exact de 500 mètres, seront situés sur le plan à quelques-unes des intersections des parallèles. Il sera facile d'assigner l'intersection convenable, lorsque l'on saura de plus dans quelle région est placé le point que l'on considère. Mais il arrive rarement que les distances calculées soient ainsi des multiples de 500; alors elles sont renfermées dans la formule $m \times 500 + n$: le nombre n est moindre que 500, et m peut être (0). Supposons donc, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de placer un signal dont la distance à la méridienne du chef-lieu soit $m \times 500 + n$, et la distance à la perpendiculaire soit $p \times 500 + q$; sachant de plus que ce signal est dans la région nord-est. On cherchera dans cette région l'intersection qui répond à $m \times 500$ et à $p \times 500$, et l'on connaîtra par-là le carré dans l'intérieur duquel le signal doit être fixé. Pour déterminer sa position dans cet espace, on portera sur le côté de ce carré qui est parallèle à la méridienne, à partir de l'intersection précédente, une longueur prise sur l'échelle et équivalente à n. On portera de même sur le côté adjacent une longueur égale à q; et par les extrémités des deux lignes n et q, si l'on mène des parallèles aux côtés du carré, elles se rencontreront en un point qui sera le lieu du signal.

220. Lorsque par ces moyens toutes les stations dont les distances aux deux axes ont été estimées, seront placées autour du chef-lieu, le Géomètre tracera, par le secours du rapporteur, toutes les lignes, soit du

périmètre, soit des polygones intérieurs, soit enfin celles qui marquent les divisions et les sous-divisions des sections, et dont il ne connaît la position que par les angles qu'elles font entre elles et avec les droites qui réunissent les points trigonométriques.

221. Pour que l'œil aperçoive facilement sur la carte les lignes principales et leurs longueurs, les points invariables et les signaux mobiles, il faudra tracer la base à l'encre bleue, et figurer par un trait rouge les lignes du périmètre de la commune et de ses sections, ainsi que les côtés de ses grands polygones. Sur l'étendue de ces lignes, on cotera leur longueur, et l'on écrira dans l'ouverture des angles le nombre de leurs degrés; on marquera aussi de rouge les signaux invariables, et en noir ceux qui ont été établis pendant le cours de la triangulation : les rivières et les forêts seront désignées en toutes lettres.

222. Pendant l'exécution du plan linéaire, les Géomètres consulteront la nature du terrain, la variété et la division des propriétés, pour en informer l'Ingénieur-vérificateur, qui, d'après ces renseignemens et conformément à l'article 4 de l'Instruction du 1.er décembre, proposera pour le levé des plans parcellaires les échelles dont il conviendra de faire usage, aux termes de l'Instruction du 20 avril 1808.

223. Je terminerai ce paragraphe en exposant la formation et l'usage des échelles, et en rassemblant dans un tableau toutes celles ordonnées pour les plans du cadastre : je donnerai aussi une table de comparaison entre l'unité métrique et les mesures anciennes de longueur, qui toutes étaient rapportées à la toise, afin de faciliter aux Géomètres la rédaction du tableau indicatif des propriétaires et des propriétés.

ARTICLE I.er

Construction des Échelles.

224. Les échelles sont destinées à établir entre les lignes que l'on trace sur la carte, le même rapport qui existe entre les distances correspondantes mesurées sur le terrain. L'unité sur laquelle l'échelle est construite est purement conventionnelle, et son choix se détermine d'après l'étendue plus ou moins considérable des proportions qu'il convient de donner au plan. C'est ainsi, par exemple, qu'afin de pouvoir renfermer sur une feuille de

de papier grand-aigle les tableaux d'assemblage qui précèdent chaque atlas, l'Instruction du 1.er décembre prescrit l'usage des trois échelles de 5, 10 ou 20000, suivant la contenance ou la configuration de la commune.

225. En adoptant le mètre pour l'unité commune des lignes du terrain et de celles du plan, on dit d'une carte, qu'elle est rapportée sur l'échelle de 1 à 5000, lorsqu'une longueur de 5000^m sur le terrain est exprimée sur la carte par une ligne d'un mètre : d'où il suit qu'un décimètre sur le plan représente 500 mètres sur le terrain; et en général, qu'une distance quelconque prise sur le papier est la cinq millième partie de la distance correspondante de l'espace.

226. On trouvera dans le tableau suivant les diverses échelles ordonnées par les Instructions du Ministre, ainsi que le rapport de leurs principales sous-divisions avec les lignes du terrain qu'elles expriment. On a aussi rassemblé dans ce tableau plusieurs autres échelles dont l'usage n'est pas prescrit; telles sont les trois échelles de 1 à 500000, de 1 à 5000000 et de 1 à 50000000 : elles pourront trouver dans la suite leur application. La première, par exemple, servirait à réduire tous les tableaux d'assemblage des communes, pour en former une carte portative de l'Empire; la seconde fournirait le moyen de présenter dans un cadre étroit la nouvelle division géométrique de la France par *Cassini*, et d'indiquer la possibilité d'y rattacher les opérations actuelles; la dernière enfin serait celle qu'il faudrait adopter pour construire, sur le méridien de *Paris*, la partie septentrionale de l'hémisphère dont ce méridien occupe le milieu.

227. En exposant la construction de l'échelle de 1 à 5000, on pourra facilement en déduire le procédé qu'il conviendrait d'imiter pour former chacune des autres.

Soit tirée la droite AB (*fig. 25*), à laquelle on donnera un double décimètre, et soit divisée cette droite en dix parties; chaque partie représentera 100 mètres : prolongeant ensuite AB d'une longueur $AC = AD$, et par tous les points de division C, A, D, &c., on élevera des perpendiculaires indéfinies sur lesquelles on portera dix fois une même ouverture de compas, puis l'on conduira par tous ces points correspondans des lignes qui seront parallèles à CB; enfin partageant les côtés opposés AC, EF du rectangle $ACEF$ en dix parties égales, et menant les transversales HO, HI, &c., l'échelle proposée sera construite.

228. Au moyen de cette échelle, on peut prendre immédiatement avec le compas toute longueur depuis un mètre jusqu'à 1100 mètres. Il est évident, en effet, que l'on trouvera sur la ligne AB les diverses longueurs correspondantes à 100^m, 200^m, 300^m jusqu'à 1000^m; et sur son prolongement AC, toutes les sous-divisions égales à 10^m, 20^m, 30^m, ... 90^m; il ne reste plus qu'à pouvoir prendre 1^m, 2^m, 3^m, ... 9^m. Les lignes $s1$, $r2$, $t3$, &c. représentent ces mesures; car le triangle HOF a pour base $HF = 10^m$; son côté FO est partagé en dix parties égales, et les droites $s1$, $r2$, $t3$, &c. sont toutes parallèles à la base : on a donc cette suite de proportions :

$$FO : O1 :: HF : s1\ ;\ FO : O2 :: HF : r2,\ \&c.;$$

et puisque $O1 = \frac{1}{10} FO$, $O2 = \frac{2}{10} FO$, &c., il s'ensuit que $s1 = \frac{1}{10} HF = 1^m$; $r2 = \frac{2}{10} HF = 2^m$, &c.

On voit, d'après cette construction, que, pour prendre sur l'échelle une longueur de 463^m, il faudra porter les pointes du compas sur les extrémités de vx. En effet,

$$vx = vt + t3 + 3x = 60^m + 3^m + 400^m = 463^m.$$

ARTICLE II.

Comparaison des Mesures anciennes avec l'Unité métrique.

229. Les Géomètres du cadastre étant obligés d'indiquer, en tête des bulletins adressés aux propriétaires, le rapport rigoureux des mesures nouvelles avec les mesures locales usitées dans la commune, on a cru utile de leur donner un moyen facile de faire ces transformations et d'en démontrer la justesse.

Pour remplir ce double objet, on va,

1.° Exposer le rapport exact de la *toise* au *mètre*, et celui du *mètre* à la *toise*, en considérant successivement chacune de ces mesures comme *unité ;*

2.° Donner les tables de comparaison, et la manière de s'en servir pour opérer les transformations de ces mesures.

Rapport de la Toise au Mètre et du Mètre à la Toise.

230. L'arc du méridien qui traverse la France, de Dunkerque à

RAPPORTS D[...]s *Tableaux généraux d'assemblage et les Plans*

RAPPORTS.	ÉCHEL[...]	[...]ARRÉ ET DE SES MULTIPLES SUR LE TERRAIN. HECTARES ou [...]0 mèt. sur 100 mèt (millions. mille. unités.)	KILOMÈTRES CARRÉS ou 1,000m sur 1,000m (millions. mille. unités.)	MYRIAMÈT. CARRÉS ou 10,000m sur 10,000m (mille. unités.)	GRADES CARRÉS ou 100,000m sur 100,000m (mille. unités.)
Un à 5,000,000.	Carte géo[...] mis[...] du [...]	[...]500,000,000. 25,000,000. 250,000. 2,500.	25,000,000. 250,000. 2,500. 25.	250,000. 2,500. 25. 2 $\frac{1}{2}$.	2,500. 25. 2 $\frac{1}{2}$. "
Un à 500,000.	Réduc[...] sem[...] cart[...]	25,000,000. 250,000. 2,500. 25.	250,000. 2,500. 25. 2 $\frac{1}{2}$.	2,500. 25. 2 $\frac{1}{2}$.	25. 2 $\frac{1}{2}$.
Un à 50,000.	Trian[...] cha[...] d'a[...] tion[...]	250,000. 2,500. 25. 2 $\frac{1}{2}$.	2,500. 25. 2 $\frac{1}{2}$.		
Un à 20,000.		40,000. 400. 4. "			
Un à 10,000.	Table[...] gén[...] div[...] sui[...] les[...]	10,000. 100. 1. "			
Un à 5,000.		2,500. 25. 2 $\frac{1}{2}$. "			
Un à 2,500.	Plan[...] éc[...] ce[...]	625. 6 $\frac{1}{4}$. " "			
Un à 1,250.	ne[...] pl[...]	156 $\frac{1}{4}$. 1 [illegible]. " "			

Manuel de[...]

Mont-Joui, près Barcelone, mesuré par MM. *Delambre* et *Méchain*, est de 9° 45′ 25″ 40‴ (degrés, minutes, secondes, tierces), et sa longueur de 551,584 72 (toises, centièmes). Ces savans, ayant égard à l'aplatissement de la terre, ont estimé la distance du pôle à l'équateur, égale à 5,130,740 toises $\frac{740}{1000}$ de toise.

Le mètre est la dix-millionième partie de cette distance, ou 0 toise 5,130,740 = 3 pieds 0 pouce 11 lignes, 295936 = 443 lignes, 295936 millionième de ligne.

La loi du 19 frimaire an 8 fixe la longueur usuelle du mètre à 3 pieds 0 pouce 11 lignes $\frac{296}{1000}$.

D'après cette détermination, le mètre équivaut à $\frac{443296}{1000}$ de ligne; d'une autre part, la toise du Pérou = 6 pieds, ou $\frac{864000}{1000}$ de ligne. Il est maintenant facile d'évaluer le rapport de la toise au mètre, puisque ces deux mesures sont rapportées à une unité commune : ce rapport sera celui de 864000 à 443296.

Poussant la division de ces deux nombres jusqu'à la dixième décimale, on trouvera

$$1^t = 1^m{,}9490363098 + \frac{108992}{443296}.$$

Négligeant cette dernière fraction, et augmentant de deux unités le chiffre décimal du dixième ordre, on a

$$1^t = 1^m{,}9490363100;$$

résultat que l'on peut substituer au précédent, sans altérer sensiblement son exactitude.

A l'égard du rapport du mètre à la toise, il a été immédiatement obtenu par la mesure du méridien, qui a donné

$$1^m = 0^t{,}5130740740.$$

MM. *Biot* et *Arago* viennent d'ajouter au méridien un arc de 2° 5′ 34″ 20‴. Ce prolongement s'étend depuis le fort de Mont-Joui jusqu'à l'île de Formentera, dans la Méditerranée; et son étendue est de 161901$^{to.}$ 55, ce qui répond à 315552^{m}. L'arc total du méridien, compris entre Dunkerque et Formentera, est donc de 12° 36′ sexagésimaux, et sa longueur d'environ 713486$^{to.}$ 27. La distance du pôle à l'équateur, déduite de ces nouvelles données, est 5130729$^{to.}$ 167, et sa dix-millionième partie donne pour la longueur du mètre 443$^{lig.}$ 295; résultat qui ne diffère de la

première estimation que de 0,001 de ligne. Cette concordance extraordinaire vérifie la justesse des premières mesures, et atteste la rigueur et les soins scrupuleux que ces quatre savans ont apportés pour mettre à fin, au milieu des fatigues et des périls qui les ont traversés, la plus vaste opération géodésique qui ait jamais été entreprise.

Tables de Comparaison entre le Mètre et la Toise et entre la Toise et le Mètre.

231. Les quantités de *toises* à convertir en *mètres* dans les calculs auxquels les Géomètres du cadastre peuvent être conduits, n'ayant jamais plus de *six* chiffres, et se trouvant toujours au-dessous de 500,000 toises, même lorsqu'ils voudront fournir les distances les plus éloignées à la méridienne de *Paris*, le résultat *en somme* de ces conversions de *toises* en *mètres* n'atteint nécessairement pas le *million* d'unités de mètres.

Pour faciliter ces conversions et les réduire à trois simples additions pour toutes les sommes de toises exprimées par *six* chiffres au plus, on a pensé qu'il suffisait de former avec huit décimales, et depuis *un* jusqu'à *cent*, une table de comparaison qui donnera toujours un résultat exact, *à moins d'un millimètre près*, pour tous les cas renfermés dans les limites précédentes.

On a jugé utile de donner aussi, mais avec neuf décimales et toujours depuis *un* jusqu'à *cent*, une table de conversion des mètres en toises : cette table offrira la même exactitude jusqu'à un *million de mètres*, qui répond à 513,074 toises $\frac{74}{1000}$ de toise.

Après avoir présenté cette table, on en donnera l'explication, et l'on indiquera la manière de s'en servir.

TABLE DE COMPARAISON entre la Toise de 6 pieds de France, et le Mètre de $3^{p.}\ 0^{po.}\ 11^{lig.}\ \frac{296}{1000}$ *de ligne.*

Toises.	MÈTRES.	Toises.	MÈTRES.	Toises.	MÈTRES.	Toises.	MÈTRES.
1.	1,949036, 31.	26.	50,674944, 06.	51.	99,400851, 81.	76.	148,126759, 56.
2.	3,898072, 62.	27.	52,623980, 37.	52.	101,349888, 12.	77.	150,075795, 87.
3.	5,847108, 93.	28.	54,573016, 68.	53.	103,298924, 43.	78.	152,024832, 18.
4.	7,796145, 24.	29.	56,522052, 99.	54.	105,247960, 74.	79.	153,973868, 49.
5.	9,745181, 55.	30.	58,471089, 30.	55.	107,196997, 05.	80.	155,922904, 80.
6.	11,694217, 86.	31.	60,420125, 61.	56.	109,146033, 36.	81.	157,871941, 11.
7.	13,643254, 17.	32.	62,369161, 92.	57.	111,095069, 67.	82.	159,820977, 42.
8.	15,592290, 48.	33.	64,318198, 23.	58.	113,044105, 98.	83.	161,770013, 73.
9.	17,541326, 79.	34.	66,267234, 54.	59.	114,993142, 29.	84.	163,719050, 04.
10.	19,490363, 10.	35.	68,216270, 85.	60.	116,942178, 60.	85.	165,668086, 35.
11.	21,439399, 41.	36.	70,165307, 16.	61.	118,891214, 91.	86.	167,617122, 66.
12.	23,388435, 72.	37.	72,114343, 47.	62.	120,840251, 22.	87.	169,566158, 97.
13.	25,337472, 03.	38.	74,063379, 78.	63.	122,789287, 53.	88.	171,515195, 28.
14.	27,286508, 34.	39.	76,012416, 09.	64.	124,738323, 84.	89.	173,464231, 59.
15.	29,235544, 65.	40.	77,691452, 40.	65.	126,687360, 15.	90.	175,413267, 90.
16.	31,184580, 96.	41.	79,910488, 71.	66.	128,636396, 46.	91.	177,362304, 21.
17.	33,133617, 27.	42.	81,859525, 02.	67.	130,585432, 77.	92.	179,311340, 52.
18.	35,082653, 58.	43.	83,808561, 33.	68.	132,534469, 08.	93.	181,260376, 83.
19.	37,031689, 89.	44.	85,757597, 64.	69.	134,483505, 39.	94.	183,209413, 14.
20.	38,980726, 20.	45.	87,706633, 95.	70.	136,432541, 70.	95.	185,158449, 45.
21.	40,929762, 51.	46.	89,655670, 26.	71.	138,381578, 01.	96.	187,107485, 76.
22.	42,878798, 82.	47.	91,604706, 57.	72.	140,330614, 32.	97.	189,056522, 07.
23.	44,827835, 13.	48.	93,553742, 88.	73.	142,279650, 63.	98.	191,005558, 38.
24.	46,776871, 44.	49.	95,502779, 19.	74.	144,228686, 94.	99.	192,954594, 69.
25.	48,725907, 75.	50.	97,451815, 50.	75.	146,177723, 25.	100.	194,903631, 00.

TABLE DES RAPPORTS des subdivisions de la Toise avec les divisions du Mètre.

PIEDS.	MÈTRES.	POUCES.	MÈTRES.	LIGNES.	MÈTRES.
		1 pouce vaut...	0,027069, 948.	1 ligne vaut...	0,002255, 829.
1P ou $\frac{1}{6}$ de T. vaut	0,324839, 385.	2............	0,054139, 896.	2............	0,004511, 658.
		3............	0,081209, 844.	3............	0,006767, 487.
2P ou $\frac{1}{3}$ de T.....	0,649678, 770.	4............	0,108279, 792.	4............	0,009023, 316.
		5............	0,135349, 740.	5............	0,011279, 145.
3P ou $\frac{1}{2}$ de T.....	0,974518, 155.	6............	0,162419, 688.	6............	0,013534, 974.
		7............	0,189489, 636.	7............	0,015790, 803.
4P ou $\frac{2}{3}$ de T.....	1,299357, 540.	8............	0,216559, 584.	8............	0,018046, 632.
		9............	0,233629, 532.	9............	0,020302, 461.
5P ou $\frac{5}{6}$ de T.....	1,624196, 925.	10............	0,270699, 480.	10............	0,022558, 290.
		11............	0,297769, 428.	11............	0,024814, 119.

TABLE DE COMPARAISON *entre le Mètre et la Toise de 6 pieds de France.*

Mètr.es	TOISES.	Mètr.es	TOISES.	Mètr.es	TOISES.	Mètr.es	TOISES.
1.	0,513074. 074.	26.	13,339925, 924.	51.	26,166777, 774.	76.	38,993629, 624.
2.	1,026148, 148.	27.	13,852999, 998.	52.	26,679851, 848.	77.	39,506703, 698.
3.	1,539222, 222.	28.	14,366074, 072.	53.	27,192925, 922.	78.	40,019777, 772.
4.	2,052296, 296.	29.	14,879148, 146.	54.	27,705999, 996.	79.	40,532851, 846.
5.	2,565370, 370.	30.	15,392222, 220.	55.	28,219074, 070.	80.	41,045925, 920.
6.	3,078444, 444.	31.	15,905296, 294.	56.	28,732148, 144.	81.	41,558999, 994.
7.	3,591518, 518.	32.	16,418370, 368.	57.	29,245222, 218.	82.	42,072074, 068.
8.	4,104592, 592.	33.	16,931444, 442.	58.	29,758296, 292.	83.	42,585148, 142.
9.	4,617666, 666.	34.	17,444518, 516.	59.	30,271370, 366.	84.	43,098222, 216.
10.	5,130740, 740.	35.	17,957592, 590.	60.	30,784444, 440.	85.	43,611296, 290.
11.	5,643814, 814.	36.	18,470666, 664.	61.	31,297518, 514.	86.	44,124370, 364.
12.	6,156888, 888.	37.	18,983740, 738.	62.	31,810592, 588.	87.	44,637444, 438.
13.	6,669962, 962.	38.	19,496814, 812.	63.	32,323666, 662.	88.	45,150518, 512.
14.	7,183037, 036.	39.	20,009888, 886.	64.	32,836740, 736.	89.	45,663592, 586.
15.	7,696111, 110.	40.	20,522962, 960.	65.	33,349814, 810.	90.	46,176666, 660.
16.	8,209185, 184.	41.	21,036037, 034.	66.	33,862888, 884.	91.	46,689740, 734.
17.	8,722259, 258.	42.	21,549111, 108.	67.	34,375962, 958.	92.	47,202814, 808.
18.	9,235333, 332.	43.	22,062185, 182.	68.	34,889037, 032.	93.	47,715888, 882.
19.	9,748407, 406.	44.	22,575259, 256.	69.	35,402111, 106.	94.	48,228962, 956.
20.	10,261481, 480.	45.	23,088333, 330.	70.	35,915185, 180.	95.	48,742037, 030.
21.	10,774555, 554.	46.	23,601407, 404.	71.	36,428259, 254.	96.	49,255111, 104.
22.	11,287629, 628.	47.	24,114481, 478.	72.	36,941333, 328.	97.	49,768185, 178.
23.	11,800703, 702.	48.	24,627555, 552.	73.	37,454407, 402.	98.	50,281259, 252.
24.	12,313777, 776.	49.	25,140629, 626.	74.	37,967481, 476.	99.	50,794333, 326.
25.	12,826851, 850.	50.	25,653703, 700.	75.	38,480555, 550.	100.	51,307407, 400.

EXPLICATION DES TABLES.

Table de conversion des Toises en Mètres.

232. En regard de chaque collection de toises se trouve le nombre des unités de mètres correspondant, plus *huit* décimales exprimant les sous-divisions de cette unité ; *six* de ces décimales sont un peu séparées des deux dernières, parce que c'est là, et même avant, qu'on peut arrêter les calculs, en leur conservant toute l'exactitude desirable.

Ainsi,

1 toise	vaut	1,m	949,036, 31.
7 to.	valent	13,	643,254, 17.
12 to.		23,	388,435, 72.
68 to.		132,	534,469, 08.
TOTAL, 88 to.	qui valent	171,	515,195, 28.

Cette dernière somme est égale à celle correspondante à 88 toises dans la table.

Avec cette table et la suivante, on peut prendre exactement le rapport de la toise au mètre, et réciproquement celui du mètre à la toise (230). On peut aussi calculer à moins d'un centième près le plus grand nombre de toises ou de mètres dont on ait besoin d'exécuter la traduction. En effet,

1 toise vaut	1,m	949036, 31.
10 to. valent	19,	490363, 1.
100 to.	194,	903631.
1,000 to.	1,949,	03631.
10,000 to.	19,490,	3631.
100,000 to.	194,905,	631.
1,000,000 to.	1,949,036,	31.

Ainsi la conversion d'un *million* de *toises* en *mètres* peut se faire à un *centimètre* près.

Table de conversion des Mètres en Toises.

233. Vis-à-vis chaque nombre de *mètres* se trouve celui des *toises* correspondant, et les parties de la toise représentées par *neuf* décimales ;

six de ces décimales sont, comme dans la première table, un peu séparées des trois dernières, par la raison qu'on peut négliger celles-ci sans craindre d'erreurs sensibles, et que les calculs n'ont été poussés aussi loin que pour prouver l'exactitude des transformations.

EXEMPLE.

1 mètre vaut	0,$^{to.}$	513074, 074.
10 met. valent	5,	130740, 74.
100^{m}	51,	307407, 4.
1,000^{m}	513,	074074, 0.
10,000^{m}	5,130,	74074.
100,000^{m}	51,307,	4074.
1,000,000^{m}	513,074,	074.

Manière de se servir de ces Tables.

234. Pour indiquer l'usage des tables dont il s'agit, il suffira d'appliquer la première à un exemple de six chiffres.

Cette table, qui commence à *1*, étant continuée jusqu'à *100*, donne sur-le-champ la conversion de tous les nombres de toises qui ne se composent que de deux chiffres, sans qu'il soit besoin d'aucun calcul.

Elle donne aussi, par le seul déplacement de la virgule, le nombre des mètres qui répond à un nombre de toises exprimé par un ou deux chiffres significatifs, suivis d'un ou de plusieurs zéros.

En effet, puisque 27 toises $=$ 52^{m},62398037, on en déduira que

27$^{to.}$ × 10000 $=$ 52,62398037 × 10000 $=$ 526239^{m},8037.

Passons maintenant à l'exemple annoncé.

Soient 275,847 toises à convertir en mètres.

Pour	270,000$^{to.}$	on a	526,239,^{m} 8037.
P.^{r}	5,800		11,304, 4105, 98.
P.^{r}	47		91, 6047, 06 57.
Donc	275,847$^{to.}$	$=$	537,635,^{m} 8190, 04 57.

235. Quelle que soit la décomposition que l'on fait subir au nombre de toises à réduire en mètres, on doit parvenir au même résultat : ainsi, reprenant l'exemple ci-dessus, on peut l'exécuter de cette autre manière.

Pour

Pour 200,000$^{to.}$ on a	389,807,^{m}	262.
Pour 70,000	136,432,	541, 70.
5,000	9,745,	181, 550.
800	1,559,	229, 0480.
40	77,	961, 45240.
7	13,	643, 25417.
275,847$^{to.}$	537,635,^{m}	819, 00457.

Mais, comme on voit, cette seconde méthode est plus longue, et ne peut servir qu'à vérifier les opérations au besoin : la première doit donc être préférée.

On croit inutile de prendre des exemples dans la seconde table, le procédé pour la transformation en *toises* de toute somme de *mètres* au-dessous d'un million, étant le même.

§. IV.

Des Plans parcellaires.

236. Lorsque la triangulation ainsi que le plan linéaire d'une commune sont executés, l'Ingénieur-vérificateur peut déterminer, d'après ce travail, le nombre des feuilles de développemens qu'exige l'étendue du territoire ou la multiplicité de ses détails. Il fera donc tracer sur ces feuilles et aux échelles adoptées par le Préfet (222), des carrés de 500 mètres de base et de 500 mètres de hauteur, qui seront cotés des lettres et des numéros correspondans au plan linéaire (218). A l'aide de ces carrés, il établira les bases *rn*, *np*, *pF*, et les points trigonométriques *B*, *A*, *H*, *D*, *E*, *F*, qui ont servi à circonscrire le périmètre des sections et celui des grands polygones : dans cet état, les Géomètres du cadastre remettront les plans parcellaires aux arpenteurs adjoints, pour y porter, sous leur surveillance, les détails des parcelles des diverses natures de culture. Ces derniers pourront employer avec avantage, dans leurs opérations topographiques, la planchette, la boussole ou l'équerre.

237. Toutes les feuilles de développemens devront être terminées par des limites fixes, telles que des rivières, des chemins, des bois, &c.; de manière que si un arpenteur est occupé, sur les confins d'une commune, à remplir un polygone dont le contour est marqué sur le plan, il ne devra

pas borner ses opérations dans cette enceinte; mais il les étendra jusqu'à la ligne même qui sépare les deux communes. *(Fig. 24, Sect. A, n.° 1.)*

238. Dans les pays à grande culture, les plans parcellaires pourront être levés à la même échelle que le plan linéaire : si la surface d'un territoire ne présente qu'un petit nombre de parties où les détails soient multipliés, on pourra lever ce territoire entier sur l'échelle de 1 à 5000, en ne figurant que par masse les polygones qui ont besoin d'être développés sur des feuilles séparées, et rapportés avec l'échelle de 1 à 2500 ou de 1 à 1250. On procédera ensuite à l'exécution de ces feuilles, et l'on marquera par des renvois les parties du plan général auxquelles elles se rapportent.

239. L'arrêté du Ministre du 20 avril a tracé la conduite que les Géomètres du cadastre et les arpenteurs doivent observer relativement à la manière de lever les propriétés bâties dans les villes ou faubourgs, les grands jardins, les marais légumiers, les villages et hameaux, les places publiques, les grandes routes, les chemins vicinaux, les rivières, enfin les terrains incultes.

La même Instruction fixe aussi le sens que l'on doit attacher au mot *parcelle*. On la trouvera rapportée au commencement de cet ouvrage; et l'on pourra consulter, pour les renseignemens ci-dessus, les pages ix, x et xj.

Pour ne pas augmenter le nombre des Planches de ce livre, on a supposé que le parcellaire de la section A *pouvait être levé sur l'échelle de 1 à 5000 comme le plan linéaire* (238); *ce qui rapporte à la* fig. 24 *toutes les constructions relatives à ces deux espèces de plans.*

ARTICLE I.er

Des Levés à la Planchette.

240. La planchette est une tablette carrée *(fig. 26)*, au milieu de laquelle on fixe un genou de cuivre soutenu sur un pied de bois à trois branches. A l'aide de ce genou, la planchette peut recevoir un mouvement quelconque, soit de rotation, soit d'inclinaison; et par le moyen d'une vis de pression, on la rend invariable dans la position où il convient de la fixer. Le plus souvent on adapte à deux de ses côtés opposés deux rouleaux cylindriques dont l'axe est porté par deux crapaudines, et qui sont maintenus immobiles, en introduisant une tige de fer entre les dents d'un pignon pratiqué à l'un des bouts des cylindres : ils servent à enrouler

le papier qui doit recevoir les opérations des Géomètres ; les plus prudens ont soin de le coller sur de la toile fine ou du taffetas, afin de prévenir, par cette précaution, les divers accidens que la longue durée des travaux peut occasionner. Il est nécessaire que la planchette, qui fait fonction de table à dessiner, se conserve parfaitement plane, et qu'elle repose d'ailleurs sur des appuis solides. Pour obtenir ces avantages, M. *Cugnot* a introduit dans sa construction d'utiles améliorations, que l'on peut lire dans son ouvrage ; mais, comme elles sont parfaitement connues des artistes, les Géomètres pourront facilement se procurer ces sortes de planchettes, en les demandant sous le nom de l'inventeur.

241. Pour faire usage de la planchette, on a besoin d'une règle de cuivre appelée *alidade*. Deux pinnules situées à ses extrémités tournent autour d'une charnière, et se placent perpendiculairement à la règle. L'un de ses bords et le milieu des ouvertures de chaque pinnule sont des lignes tracées dans un même plan. On se sert des pinnules pour diriger un rayon visuel du point de station sur les objets environnans, et du bord de la règle, que l'on a coutume de tailler en biseau, pour tirer sur le papier une ligne correspondante à ce rayon. Au lieu de deux pinnules qui ne permettent pas à l'observateur de mirer des points éloignés, on élève sur la règle de cuivre une lunette qui peut tourner librement autour d'un axe transversal, et se diriger vers les signaux qui ne sont pas dans le plan de l'horizon. Le bord de la règle et l'axe de la lunette, quelle que soit sa position, sont dans un plan perpendiculaire à la planchette ; de manière que la droite tracée sur le papier en suivant le biseau de la règle, peut être regardée comme la projection du rayon visuel.

Le Géomètre doit joindre à l'alidade un niveau pour mettre horizontalement la planchette, une chaîne et un double mètre pour mesurer l'intervalle qui sépare les stations, des jalons pour diriger ses alignemens, et un fil à plomb.

242. Ce niveau, dit *à bulle d'air*, consiste en un tuyau de verre de deux décimètres de longueur, et d'environ vingt millimètres de diamètre : ses deux bouts sont hermétiquement fermés, et sa capacité est occupée par de l'esprit-de-vin sur lequel surnage une bulle d'air dont l'extrême mobilité avertit aussitôt des changemens d'inclinaison éprouvés par le corps qui porte le tuyau. Pour éviter les fractures, on le renferme dans un étui de

cuivre, ayant pour support une règle bien plane, et à laquelle il faut que l'axe du cylindre de verre soit parfaitement parallèle. Au milieu de cette enveloppe métallique, on a pratiqué une ouverture que la bulle d'air doit occuper quand la planchette est de niveau. On conçoit que l'on n'est bien assuré de l'horizontalité de la planchette qu'après y avoir appliqué le niveau dans deux positions perpendiculaires entre elles. Souvent on éprouve des difficultés pour accorder ces deux épreuves ; c'est ce qui a déterminé M. *Lenoir* à construire un niveau circulaire, qui peut remplacer avec avantage le précédent, et qui n'exige qu'une seule observation. En effet, une surface sera horizontale, lorsqu'en y superposant cet instrument, la bulle d'air viendra se fixer au centre.

243. La chaîne est ordinairement un décamètre divisé en cinquante doubles décimètres, liés les uns aux autres par des anneaux de fer, et, de mètre en mètre, par des anneaux de cuivre. L'un des deux hommes qui dirigent la chaîne, plante en terre à chaque portée, et perpendiculairement, une fiche de fer de six décimètres de hauteur ; le second les relève successivement jusqu'à ce qu'elles soient toutes épuisées : alors il lui est facile, en comptant ces fiches, dont le nombre est vulgairement de dix, d'estimer combien la ligne mesurée contient de décamètres.

Le double mètre est un bâton de cette longueur, sous-divisé en décimètres et en centimètres ; on le substitue à la chaîne, quand on mesure de très-petites distances.

244. Les jalons sont des bâtons droits de trois mètres de longueur, que l'on choisit du plus petit diamètre possible, et que l'on enfonce verticalement dans la terre par l'une de leurs extrémités préparées pour cet usage ; on place à l'autre bout un morceau de papier blanc, afin de les distinguer et de les reconnaître au loin.

245. Le fil à plomb sert à placer dans une même verticale le lieu du terrain où l'on établit la planchette, et le point qui doit le représenter sur le plan. Pour faire concourir ces deux points avec exactitude, on emploie un compas d'épaisseur, dont les pointes puissent atteindre au centre de la planchette. A l'une d'elles est suspendu le fil à plomb, l'autre s'applique sur le point du papier qui doit répondre au pied du jalon de la station ; puis l'on dispose la planchette de manière que le fil à plomb prenne la direction même de ce jalon.

246. Il y a deux méthodes pour lever les détails à la planchette; l'une s'appelle *la méthode d'intersection :* l'on y a recours toutes les fois que le terrain à figurer n'offre qu'un petit nombre de points accessibles. Qu'il s'agisse, par exemple, de représenter la portion de territoire *BCGEF (fig. 26)*, en supposant qu'on ne puisse mesurer que la ligne *AB*, et n'établir la planchette qu'aux seuls points *A*, *B*, *H*, donnés d'avance par la triangulation, et déjà rapportés sur le papier par la connaissance de leur distance à la méridienne du chef-lieu et à sa perpendiculaire.

Après avoir élevé des signaux au sommet de tous les angles *BCDH*, &c., on placera en *A* la planchette, ayant le soin d'y faire coïncider le point *(a)*, comme il a été dit (245). En ce point, on pique verticalement une aiguille très-fine, contre laquelle on appliquera l'alidade dirigée vers le signal *B;* on tracera la ligne *ab*, qui sera composée d'autant de parties de l'échelle que *AB* contient de mètres. Puis, faisant tourner l'alidade sur l'aiguille, on l'arrêtera successivement dans l'alignement des points *C*, *H*, *E*, *F*, et l'on menera sur le plan les droites indéfinies *ac*, *ah*, *ae*, *af*. Cela fait, on transportera la planchette en *B*, après avoir laissé un signal au point *A*, et l'on s'attachera à rendre sa nouvelle position parallèle à la première. Cette opération s'appelle *orientement.* Pour orienter la planchette, il faut l'établir horizontalement de manière que *b* corresponde à *B* (245), fixer l'aiguille en *b*, y faire toucher l'alidade, en appliquant le bord de la règle sur *ab;* et dans cet état, l'observateur fera tourner la planchette, restant toujours horizontale pendant ce mouvement, jusqu'à ce qu'il aperçoive dans la lunette ou dans les pinnules le signal *A :* alors le plan est orienté, et le Géomètre peut continuer ses opérations. Il dirigera donc de nouveau l'alidade vers les points *C*, *H*, *E*, *F;* et menant les droites indéfinies *bc*, *bh*, *be*, *bf*, elles détermineront sur le plan par leur intersection avec *ac*, *ah*, *ae*, *af*, la position des points du terrain *B*, *C*, *H*, *E*, *F*. En effet, les triangles *ABC*; *abc*; *ABH*, *abh*; *ABF*, *abf*, sont équiangles, et par conséquent semblables.

247. Le Géomètre transportera enfin la planchette en *H*. Il emploiera, pour la placer et pour l'orienter, les mêmes soins et les mêmes procédés; et de cette station, il marquera sur le plan le lieu des points *D*, *G :* enfin, réunissant tous ces points par des droites, il formera le polygone *bcgef* et ses diverses sous-divisions *abf*, *abh*, *afe*, &c. Rarement les limites

d'un territoire sont des lignes droites : pour marquer les sinuosités, telles que *FfghikB* sous-tendues par les côtés des polygones, on élève sur *BF*, par le moyen de l'équerre, des perpendiculaires équidistantes *af*, *bg*, *ch*, *di*, *ek*, que l'on mesure avec la chaîne ou le double mètre; on porte sur le plan ces lignes réduites d'après l'échelle; et par les extrémités *xyzuv*, on trace à la main une ligne courbe, qui sera d'autant plus conforme à la courbure du terrain, que les perpendiculaires auront été plus rapprochées.

248. La seconde méthode de lever les détails consiste à tracer, autour de l'espace que l'on veut figurer, le polygone *BCG*, &c. en relevant tous les angles *B*, *C*, *G*, &c. et mesurant chaque côté, *BC*, *CG*, *GE*, &c.; ce qui suppose la possibilité de porter la chaîne et la planchette sur tous les points de ce périmètre. Supposons donc que les points *B*, *C*, connus de position relativement à la méridienne, soient représentés sur le plan par les points *b*, *c*; le Géomètre s'établira en *C*, et orientera la planchette par les moyens ci-dessus exposés (246) : ensuite il dirigera l'alidade sur le signal *G*, fera chaîner *CG*, prendra cette longueur sur l'échelle, et la portera sur le plan de *c* en *g*. Transportant la planchette en *G*, il déterminera de même la longueur et la position de la ligne *ge* correspondante à *GE*. Enfin, arrivé en *F*, il pourra vérifier la justesse de ses mesures; car la ligne *fb*, qui ferme le polygone *bcgef*, doit former avec les droites adjacentes *ef*, *bc*, des angles égaux à ceux que font entre eux sur le terrain les rayons visuels *BF*, *EF*, *BC*. De plus, le côté *bf* doit contenir l'unité de l'échelle autant de fois que *BF* contient de mètres. Les parties curvilignes se figurent par le procédé expliqué (247).

249. On a souvent besoin, dans les levés de détail, de fixer sur le plan le lieu d'un quatrième point par la connaissance de la position respective de trois autres. Ce problème est résolu dans le *Développement des Instructions*, page xix, et dans le chap. I.er, n.° 84. On peut consulter aussi le n.° 136, chap. II, sur les avantages et les inconvéniens de la planchette.

Article II.

Des Levés à la Boussole.

250. J'ai fait connaître (chap. III, art. VIII) les imperfections de la boussole, et les erreurs inévitables que l'on commettrait, si l'on appliquait

cet instrument, soit à la grande triangulation des communes, soit à la formation de leurs plans linéaires; mais les Géomètres pourront l'employer avec utilité, quand il s'agira seulement de remplir des détails renfermés entre des limites déjà placées sur le plan, et fixées par des opérations certaines.

La boussole d'arpenteur est une boîte carrée de $0^{m}165$ de côté. Au milieu s'élève un pivot qui porte une aiguille aimantée d'un décimètre de longueur, sur une chape d'agate pratiquée au centre et dans l'épaisseur de l'aiguille : elle circule autour d'un cercle de cuivre divisé en 360°. Au fond de la boussôle, sont marqués les quatre points cardinaux; et la ligne *nord-sud*, qui répond à 0° et 180°, est parallèle à l'un des côtés de la boîte. Ce côté soutient une alidade à visière, qui peut tourner dans un plan vertical lorsque la boussole est établie horizontalement. Enfin tout l'instrument est mobile à l'aide d'un genou qui repose, ainsi que dans la planchette, sur un pied à trois branches.

251. Il y a plusieurs manières d'observer avec la boussole; mais il suffira du procédé que je vais développer sur un exemple, pour être en état d'y substituer, suivant les cas, les divers moyens exposés pour la planchette. Soit le polygone $ABCDEFGH$ (*fig. 27*), dont tous les points sont accessibles, et qu'il faut figurer sur le plan. On placera horizontalement la boussole au point A; et la faisant tourner sur son pivot jusqu'à ce que le point B soit dans la direction de la visière, on estimera la valeur de l'angle que fait la ligne AB avec l'aiguille aimantée, qui, après quelques oscillations, s'arrête toujours dans le plan du méridien magnétique. Cet angle est facile à évaluer; car, à cause du parallélisme de l'alidade et de la ligne *nord-sud*, il est égal à celui que fait cette dernière droite avec l'aiguille. On remarquera soigneusement si l'aiguille s'est fixée à la droite ou à la gauche de la ligne *nord-sud*; et sur le *brouillon* ou *registre*, on cotera fidèlement le nombre des degrés de l'angle observé $IAB = 60°$, et le sens de la direction du rayon AB par rapport à l'aiguille AI. Mesurant ensuite avec la chaîne l'intervalle AB, on écrira les 231 mètres, expression de la longueur de cette ligne, sur l'étendue de la droite AB qui la représente. Le Géomètre transportera ensuite la boussole au point B; et dirigeant avec les mêmes soins la visière vers le point C, il estimera l'angle $rBC = 150°$, l'inscrira sur son registre, et le tracera dans le sens convenable : il mesurera l'espace qui sépare les points B, C, et portera sur BC, sa longueur trouvée égale à

80 mètres. Il continuera ainsi de se transporter successivement aux points *C*, *D*, *E*, &c. jusqu'à ce qu'il soit de retour à la première station *A*.

252. On peut facilement, par cette méthode, lever le cours d'une rivière, les sinuosités d'un chemin, les contours d'une petite propriété ; il suffit de multiplier assez les stations pour peindre avec exactitude les ondulations du terrain.

253. Pour vérifier la justesse des observations angulaires faites avec la boussole, il faut examiner si, d'après un théorème connu de géométrie, la somme des angles intérieurs du polygone que l'on a fermé, vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux. Cette épreuve exige que l'on se procure la valeur des angles *H*, *A*, *B*, &c. qui ne sont pas immédiatement observés. Il est facile de les déduire des opérations directes; l'angle ABC, par exemple, est égal à $ABq + qBC$: or, à cause du parallélisme de l'aiguille dans les deux stations *A*, *B*, on a $ABq = IAB = 60°$; et qBC, supplément de rBC, sera égal à $180° - 150° = 30°$; donc $ABq + qBC = ABC = 90°$. On déterminera de même les angles *A*, *H*, &c.

254. Quant à la vérification des côtés, c'est en les traçant sur le plan avec un rapporteur et l'échelle adoptée que l'on s'aperçoit s'ils ont été bien mesurés; car alors la figure se ferme exactement, et le dernier côté *AH* contient autant de parties de l'échelle que son correspondant sur le terrain contient de mètres.

Les difficultés que l'on éprouve pour transporter avec précision sur le papier les résultats inscrits sur le registre, ne sont pas un des moindres inconvéniens du procédé de la boussole.

255. Cet instrument sert aussi à fixer sur une carte un quatrième point duquel il est possible d'observer trois autres points connus de position sur le plan. La solution de ce problème est rapportée dans le *Développement des Instructions*, page xxiij.

ARTICLE III.

Des Levés à l'Équerre.

256. L'usage de l'équerre doit être borné au levé du détail des parcelles qui ont peu d'étendue. La forme de cet instrument est celle d'un prisme octogonal

octogonal régulier, d'environ un décimètre de hauteur, et dont le cercle circonscrit aux bases a cinq centimètres à-peu-près de diamètre. Au milieu de chaque face du prisme, on pratique une ouverture déliée, et la direction des rayons visuels est ainsi déterminée par la condition de traverser deux rainures opposées. L'équerre est portée sur un seul pied terminé par une pointe de fer que l'on enfonce dans la terre; si la surface du sol est sèche ou pierreuse, on l'établit sur un trépied, comme la planchette et la boussole.

257. La principale application de l'équerre étant d'élever sur le terrain des perpendiculaires, les constructeurs d'instrumens marquent d'un point le sommet des visières qui servent à déterminer deux rayons à angles droits : on vérifie, par leur moyen, la justesse de l'équerre. En effet, si l'on remarque un objet éloigné à travers deux de ces quatre pinnules, et que l'on établisse un signal dans la direction du rayon visuel perpendiculaire au premier, et passant par les deux autres pinnules, on sera assuré que l'équerre est juste, lorsque l'ayant fait tourner sur son pied jusqu'à ce que l'observateur aperçoive le signal dans les premières pinnules, il verra de plus dans les secondes l'objet choisi d'abord pour point de mire. Dans le cas où cette coïncidence n'aurait pas lieu, il convient de ne rien entreprendre avec l'instrument, qui n'est pas susceptible de rectification, à cause de la fixité des rainures.

258. Pour lever avec l'équerre un polygone quelconque $ABCD$, &c. (*fig. 27*), on mène dans le sens de sa plus grande dimension une ligne AX que l'on nomme *directrice*. On mesure d'abord toute la longueur de cette ligne, ayant soin de fixer en terre, de 50 mètres en 50 mètres, ou de 100 mètres en 100 mètres, des piquets numérotés; puis on abaisse sur cette directrice, du sommet de tous les angles B, D, F, H, des perpendiculaires que l'on chaîne exactement, et dont on inscrit sur le *brouillon* les longueurs respectives. On évalue, avec le double mètre, les petits segmens de la directrice compris entre les pieds p, q, s, t des perpendiculaires, et les piquets les plus voisins de ces intersections. On connaît ainsi les longueurs partielles Ap, pq, qs, sX, dont la somme doit reproduire la ligne entière AX, et l'on est en état d'estimer la surface des triangles rectangles ou des trapèzes qui couvrent le polygone.

259. On ne parvient souvent qu'après divers essais à trouver le pied

des perpendiculaires *Bq*, *Ds*, &c. Pour placer le point *s*, par exemple, l'arpenteur établira son équerre sur l'un de ceux de la directrice, en faisant coïncider avec *AX* deux des pinnules surmontées d'un point, et en approchant l'instrument aussi près de *s* qu'il le pourra juger par une première estime; alors il observera si le signal élevé en *D* peut être vu à travers les deux autres pinnules. Dans le cas contraire, il reculera l'équerre dans le sens convenable, jusqu'à ce qu'il soit parvenu à faire passer son axe par le pied *s* de la perpendiculaire *Ds*. Le nombre de ces épreuves sera d'autant moindre que le Géomètre sera plus exercé.

260. La pratique de l'équerre exige qu'on la dispose toujours de manière que les pinnules soient verticales; on redresse, à l'aide du fil à plomb, les inclinaisons qui pourraient échapper à la vue quand on travaille sur un terrain en pente. Cette observation est très-importante; et pour en faire sentir l'utilité, supposons qu'il s'agisse d'élever au point *s* une perpendiculaire de 200 mètres de longueur sur la directrice *AX*, et d'aller fixer un signal à son extrémité. Si, au lieu de placer l'équerre comme on vient de le prescrire, on l'établit de manière que la projection du rayon visuel fasse avec la vraie perpendiculaire un angle de 2° *(fig. 28)*, et que l'on mesure 200 mètres sur cette projection, on déterminera le point *B* pour le lieu du signal à la place du point *A*. La distance *AB* est facile à calculer, et l'on trouvera qu'elle égale $7^{m},097$: il est visible que l'erreur deviendrait d'autant plus grande, que l'angle *ASB* et la longueur *AS* seraient plus considérables.

§. V.

Tableau indicatif des Propriétaires et des Propriétés foncières.

261. C'est pendant la durée des opérations relatives au plan parcellaire, que le Géomètre du cadastre rassemble tous les renseignemens qu'il doit consigner dans la partie du tableau indicatif dont il est chargé : on en trouvera le modèle et l'application au paragraphe VIII. Quant à la marche qu'il doit suivre pour établir la minute du tableau indicatif, et pour passer des numéros provisoires aux numéros définitifs, il faut consulter l'Instruction du 20 avril, ci-dessus rapportée, dans laquelle le Ministre trace aux Géomètres la conduite qu'ils doivent observer envers les maires, les propriétaires et les indicateurs.

262. L'*agenda* libre que le Géomètre remplit sur le terrain, lui donne la facilité de faire toutes les corrections nécessaires, sans nuire à la netteté du tableau indicatif. Par exemple, si un indicateur ne peut déclarer au Géomètre le nombre précis des parcelles d'un certain polygone ; si un fermier cultive des pièces de terre appartenant à divers propriétaires, sans pouvoir assigner rigoureusement les limites de chacune ; si une portion de territoire est contestée entre deux ou un plus grand nombre de prétendans ; ou enfin si un bois se divise entre plusieurs particuliers, et qu'ils refusent leur consentement à l'ouverture des laies nécessaires pour distinguer leurs propriétés respectives : dans ces derniers cas, prévus par l'Instruction du 1.er décembre, le Géomètre se conformera aux réglemens des articles 15 et 17 ; et pour les deux premiers, il marquera sur le plan le polygone d'un seul numéro, et le portera ensuite sur le tableau provisoire en cette sorte :

$$6\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.$$

L'accolade qui suit ce numéro sert à rappeler au Géomètre qu'il doit retourner sur le terrain avec les propriétaires, pour remplir les détails de ce polygone. Quand il est parvenu à les réunir et à recevoir leurs déclarations, il désigne chaque parcelle par les numéros accentués *6'*, *6''*, *6'''*, &c., et la numération provisoire du tableau indicatif devient

$$6\left\{\begin{array}{l} 6' \\ 6'' \\ 6''' \end{array}\right.$$

Le Géomètre écrit après ces divers numéros le nom et la profession du propriétaire de la parcelle.

263. Quand toutes les propriétés de la commune sont reconnues, que les erreurs sont rectifiées sur la minute ou agenda provisoire, le Géomètre procède à la confection de la numération et du tableau définitifs. Cette dernière opération consiste à suivre, dans la désignation de toutes les parcelles d'une même section *(fig. 24)*, l'ordre naturel des nombres, sans interruption et sans double emploi, ayant soin de peindre ces derniers

numéros d'une couleur autre que celle employée pour les numéros provisoires; puis il transporte sur le tableau les numéros définitifs en regard des numéros provisoires correspondans. Enfin le Géomètre adressera à l'Ingénieur-vérificateur le plan linéaire de la commune, les différentes feuilles de développement auxquelles les plans parcellaires ont donné lieu, et la mise au net du tableau indicatif.

§. VI.

Vérification.

264. L'Ingénieur-vérificateur vérifie par lui-même, ou par un employé de confiance dont il est responsable, toutes les opérations des Géomètres et des arpenteurs adjoints. Il serait avantageux pour les progrès du cadastre et pour l'intérêt des Ingénieurs, que la triangulation et le plan linéaire des communes fussent soumis à la vérification avant l'entreprise des feuilles de développement du parcellaire : on préserverait par-là les détails qu'elles doivent représenter, de l'influence des erreurs qui peuvent s'être glissées dans les travaux préliminaires ; et s'ils ont été reconnus bons dans toutes leurs parties, les arpenteurs s'en serviraient alors avec plus de confiance.

265. L'Ingénieur-vérificateur observera, dans la vérification des plans, les dispositions ci-dessous rapportées du chapitre II de l'Instruction du 25 février 1806. Il dressera, ensuite de ses opérations, un procès-verbal sommaire, dans lequel il énoncera si les fautes qu'il a signalées ont été soigneusement rectifiées par le Géomètre : il remettra ce procès-verbal au directeur des contributions, qui en rendra compte au Préfet.

EXTRAIT de l'Instruction du 25 Février 1806, sur la vérification des arpentages.

Dispositions relatives à l'Opération matérielle de la Vérification.

266. L'Ingénieur-vérificateur commencera par vérifier, autant que faire se pourra, l'exactitude des mesures et de l'échelle dont s'est servi le Géomètre du cadastre, ou l'arpenteur adjoint.

267. Il s'assurera si toutes les parcelles sont marquées sur la minute du plan, par des numéros dont la série doit recommencer dans chaque section.

268. Il examinera si le plan est bien orienté, et si les carrés d'un palme de côté y ont été exactement tracés.

269. A cet effet, il procédera à la reconnaissance de la base qui a servi au levé du plan linéaire, et il constatera si ses extrémités ont été fixées par des bornes en pierre ou en bois, ou de toute autre manière.

270. Il vérifiera l'étendue de cette base, soit par des procédés trigonométriques, soit en la remesurant horizontalement sur le terrain; et il énoncera dans son procès-verbal, non-seulement la longueur par lui trouvée, mais encore celle indiquée sur le canevas trigonométrique, ainsi que la différence, en plus ou en moins, qui pourra résulter de la comparaison de ces deux mesures entre elles.

271. Il rattachera à cette même base plusieurs des points qui ont été observés lors du levé du plan, tant dans l'intérieur qu'au dehors du territoire de la commune, et qui se trouvent désignés par le canevas.

272. Il constatera la valeur des angles et la longueur des côtés des divers triangles qu'il aura observés; puis, comparant chacun de ces angles et de ces côtés avec ceux déterminés, pour les mêmes triangles, sur la minute du plan et dans le registre des opérations trigonométriques, il énoncera les résultats de cette comparaison.

273. Si ces résultats sont parfaitement concordans, la triangulation de la commune sera réputée régulière.

274. Mais, dans le cas de non-concordance, l'Ingénieur-vérificateur s'assurera si les erreurs par lui reconnues ne sont pas susceptibles d'influer sensiblement sur l'exactitude des détails du plan; puis il conclura, selon qu'il y aura lieu, à ce que le canevas trigonométrique soit rectifié ou même refait entièrement; et lorsque ce canevas aura été rectifié ou refait entièrement, il continuera sa vérification.

275. Immédiatement après la vérification de la triangulation ou du plan linéaire, le vérificateur procédera à celle des plans parcellaires, de la manière ci-après.

276. Il tracera sur le plan, et mesurera ensuite horizontalement sur le terrain, deux lignes droites qui, se coupant à angles droits, autant que faire se pourra, vers le centre de la commune, traverseront chacune diamétralement toute l'étendue du territoire.

277. Mais il arrivera souvent que la nature des localités ne permettra point d'établir et de mesurer commodément, sur le terrain, deux lignes de cette espèce. Dans ce cas, le vérificateur mesurera l'équivalent de la longueur totale de ces deux grandes lignes, dans trois ou quatre autres parties du territoire qui lui offriront plus de facilité.

A cette fin, il prendra, dans l'une de ces parties du territoire, un des points qui y auront été exactement déterminés lors de la triangulation de la commune, ou bien il y observera trigonométriquement un nouveau point; et après s'être assuré que l'un ou l'autre point se trouve placé sur le plan dans sa véritable position, il s'en servira pour mener à volonté, dans cette partie de territoire, une ligne droite qu'il dirigera principalement vers les endroits où les parcelles du plan seront multipliées.

Il fera la même opération dans les autres parties du territoire où il établira des lignes semblables.

Enfin il tracera ces diverses lignes sur le plan absolument dans les mêmes directions qu'elles auront sur le terrain sur lequel il les mesurera successivement, en partant de chaque point qu'il aura choisi.

278. En mesurant sur le terrain les lignes droites énoncées dans les deux articles précédens, le vérificateur notera particulièrement les distances partielles ou intermédiaires de chaque point d'intersection du périmètre tant des sections que des parcelles qu'il traversera.

279. Il calculera ensuite successivement sur le plan, à l'aide de l'échelle et du compas, la longueur totale de chaque ligne droite, ainsi que ses divisions ou les distances partielles et intermédiaires des points d'intersection qu'il aura mesurées sur le terrain, et notées particulièrement.

280. Puis comparant chacune des mesures par lui prises sur le terrain avec chacune de celles indiquées par l'échelle du plan pour les mêmes lignes et pour les portions de ligne correspondantes, il constatera si les résultats de cette comparaison sont entièrement concordans, et, en cas de non-concordance, les différences qu'ils présenteront.

281. Si la longueur totale de chacune des lignes droites mesurées sur le terrain diffère *d'un centième*, en plus ou en moins, de celle donnée par le plan, ce plan sera reconnu défectueux, et le vérificateur conclura à ce qu'il soit procédé au levé d'un nouveau plan.

282. Cependant, si la différence *d'un centième* ne se rencontre que dans quelques distances partielles relatives au périmètre de sections ou de polygones (la longueur totale des grandes lignes droites étant d'ailleurs reconnue exacte, ainsi que le canevas trigonométrique et le plan linéaire), le plan pourra être réputé régulier quant à son ensemble; mais le Géomètre du cadastre sera tenu de rectifier les diverses parties de l'intérieur du plan qui offriront des défectuosités.

283. La latitude *d'un centième* doit, en général, suffire pour tous les arpentages des communes. Néanmoins, s'il est reconnu que la nature des localités présente, dans quelques contrées, des difficultés telles que l'on ne puisse y mesurer des lignes droites d'une étendue suffisante qu'à l'aide de lignes brisées ou de parallèles; dans cette circonstance, le Préfet pourra tolérer une différence un peu plus forte que du centième : mais cette tolérance n'aura lieu que pour les plans où le vérificateur en aura lui-même démontré la nécessité dans son procès-verbal; et, dans aucun cas, elle ne pourra s'étendre jusqu'au *cinquantième.*

284. Indépendamment des détails du plan qui auront été vérifiés par la méthode ci-dessus indiquée, le vérificateur devra encore s'assurer, par des procédés trigonométriques, de l'exactitude de plusieurs polygones d'une certaine étendue, qui se trouveront éloignés de la direction des lignes de vérification, ainsi que de celle de toutes les parties du périmètre de la commune qu'il rencontrera sur son passage.

285. Enfin, d'après la connaissance qu'il aura acquise des lieux par lui observés et parcourus, il énoncera dans son procès-verbal si les rues, places publiques, routes, chemins vicinaux, rivières et ruisseaux, ainsi que les montagnes, ravins et cavités, lui ont paru être tracés et figurés avec soin sur le plan; et il fera connaître les imperfections ou les négligences qu'il aura remarquées dans ces détails, pour que le Géomètre les rectifie.

§. VII.

Calcul des Plans et des Propriétés.

286. Aussitôt que l'Ingénieur-vérificateur a reçu du Géomètre du cadastre le plan linéaire d'une commune, les feuilles de développement des plans parcellaires et la première partie du tableau indicatif, il fait

procéder dans ses bureaux au calcul de la contenance de chaque numéro ou propriété particulière. Cette estimation des surfaces exige deux opérations, dont la seconde sert de preuve à la première. Les élémens de celle-ci se prennent sur les plans mêmes parcellaires, à l'aide de l'échelle et du rapporteur, et se transportent ensuite, ainsi que les résultats, sur un registre ayant pour titre *Premier Cahier de calculs.* La vérification s'exécute sur le plan linéaire ; les facteurs et leurs produits sont consignés sur un deuxième registre, intitulé *Second Cahier de calculs.*

287. Pour la rédaction du premier cahier, il faut distinguer les cas où le plan parcellaire est levé à l'échelle de 1 à 5000, de ceux où l'on a fait usage de l'échelle de 1 à 2500, ou de celle de 1 à 1250. Dans le premier, le calculateur commencera par diviser les parcelles en triangles tracés au crayon. Leurs côtés sont représentés par des lignes ponctuées n.° 1 *(fig. 24).* Il mettra aussi au crayon une lettre, par ordre alphabétique, dans chaque triangle d'un même numéro, afin d'éviter les omissions ou les doubles emplois ; ensuite il prendra la base et la hauteur de ces triangles, en se servant de l'échelle de 1 à 2500, au lieu de l'échelle de 1 à 5000, qui est supposée celle du plan. Par-là il formera, à la vérité, des facteurs doubles et des produits quadruples des véritables ; mais il lui sera possible de saisir et d'évaluer des fractions de ligne, qui échapperaient sur une échelle plus petite. Avec ces lettres et ces nombres, le Géomètre remplira les trois premières colonnes du premier cahier ; la quatrième, qui doit présenter la vraie contenance de chaque parcelle, reçoit des résultats que l'on obtient en doublant la somme des produits partiels qui répondent aux divers triangles du numéro. C'est ainsi que l'on trouve, pour la surface du numéro 1, 29$^{arp.}$ 35$^{per.}$ 42$^{me.}$, nombre double de la somme des produits partiels, laquelle se monte à 14$^{arp.}$ 62$^{per.}$ 71$^{me.}$ La raison de ce procédé est fondée sur ce que, ces produits offrant le double de l'aire de chaque triangle, et leur somme, le double de l'aire de la parcelle, il faudrait prendre la moitié de cette somme pour avoir la vraie surface du numéro. Mais, d'une autre part, il suit de ce qu'on a substitué l'échelle de 1 à 2500 à l'échelle de 1 à 5000, que les facteurs de la seconde colonne n'ont que la moitié de leur valeur, et que les produits de la troisième sont quatre fois trop petits ; leur somme n'a donc aussi que le quart de sa valeur réelle ; il faudrait, par conséquent, pour la lui donner, prendre d'abord la moitié

moitié de cette somme, puis multiplier le quotient par 4. Il est facile de voir que l'on parvient immédiatement au résultat final, en prenant le double de la somme primitive.

288. Lorsque les plans parcellaires auront été levés avec l'échelle de 1 à 2500, ou de 1 à 1250, on estimera, par le moyen de ces échelles mêmes, les dimensions des triangles, et la quatrième colonne sera remplie alors par des nombres égaux à la moitié des sommes inscrites dans la troisième, au bas de chaque numéro.

289. Les contenances de toutes les parcelles de la section *A (fig. 24)* ont été calculées d'après le mode expliqué au n.° 287 : les cahiers rapportés à la fin de ce paragraphe, et qui contiennent les détails de tous les calculs du plan, ainsi que les calculs de sa vérification, sont conformes au modèle prescrit par les instructions du Ministre. Ils sont suivis d'une récapitulation dont les deux résultats doivent être identiques quand la justesse est parfaite, et qui ne peuvent différer au-delà de $\frac{1}{500}$ pour que le plan soit admissible.

290. La récapitulation du premier cahier offre un article nouveau, qui ne fait pas partie des sommes que l'on trouve inscrites au total de chaque page : c'est la contenance des chemins, ruisseaux, rivières, rues et places publiques de la commune. Le Géomètre fait ce travail après le calcul des parcelles, et n'en porte le résultat que dans la récapitulation, afin d'avoir ainsi la surface exacte et entière de chaque section.

291. Le second cahier de calcul fait parvenir, par une autre voie, à la contenance de la commune : c'est pourquoi ses résultats servent de vérification à ceux du premier. En effet, si l'on compte le nombre des carrés qui couvre le plan linéaire sur lequel toute la commune est rapportée, et que de la valeur de ces carrés convertis en arpens métriques on retranche celle des portions de carrés qui sont hors du périmètre de la commune, sa contenance doit être donnée par cette soustraction. On estime l'aire des portions de carrés en les divisant en triangles, et en se conduisant comme il vient d'être dit (287) pour les numéros des plans parcellaires établis sur l'échelle de 1 à 5000. Le second cahier *(page 200)* ne s'applique qu'aux seuls carrés tracés sur la section *A (fig. 24)*.

L'Ingénieur-vérificateur conserve le premier cahier de calculs, et dépose le second à la direction.

Article I.er

Évaluation de plusieurs Surfaces agraires.

292. Parmi les polygones, le rectangle, le parallélogramme, le triangle et le trapèze, sont les figures qui se présentent le plus souvent, et auxquelles on peut rapporter toutes les autres. Parmi les courbes régulières, le cercle et l'ellipse sont les seuls qui servent de périmètre à quelques pièces de terre ainsi limitées par l'art. Je me contenterai d'exposer, sans démonstration, les formules qui donnent la quadrature de ces sortes de surfaces.

Soient b et h, la base et la hauteur d'un rectangle, ou d'un parallélogramme quelconque, et soit s son aire. On fait voir dans les élémens de géométrie, que

$$s = bh.$$

Si $b = 34^{m},6$; $h = 18^{m},7$, on trouvera

$$s = 647^{mc},02.$$

293. Que b, h représentent la base et la hauteur d'un triangle, on sait que son aire est la moitié de celle du parallélogramme qui aurait les mêmes dimensions ; d'où

$$s = \frac{bh}{2} = \frac{34,6 \times 18,7}{2} = 323^{mc},51.$$

Si dans le triangle BAC (*fig. 13, planche 5*) on a chaîné les côtés $AB = 100^{m}$, $AC = 150^{m}$, et observé l'angle compris $BAC = 54^{o}, 20'$, on aura $s = \frac{AC \times BP}{2}$; mais le triangle rectangle ABP donne (35) $BP = \frac{AB \sin. A}{R}$. Substituant cette valeur de BP dans celle de s, il viendra

$$s = \frac{AC \times AB, \sin. A}{2 \times R} = \frac{150 \times 100 \times \sin. 54^{o}\ 20'}{2 \times R}.$$

Appliquant les logarithmes à ces nombres, on trouve

$$s = 6093^{mc},20.$$

Quand on connaît les trois côtés du triangle dont on veut mesurer la surface, on l'obtient par la formule énoncée (74) : en voici la démonstration.

L'aire du triangle ABC (*fig. 13*) est exprimée par

$$s = \frac{b}{2} \times BP \quad (1).$$

Les triangles rectangles ABP, BCP, donnent

$$BP^2 = c^2 - AP^2;\ BP^2 = a^2 - (b - AP)^2.$$

Égalant ces deux valeurs de BP^2, et développant, on obtient

$$AP = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

Mettant cette expression dans la première valeur de BP^2, il vient

$$BP^2 = c^2 - \left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right]^2,$$

d'où

$$4b^2\, BP^2 = 4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Le second membre de cette équation peut recevoir successivement les transformations suivantes, dont il est facile de se rendre raison.

$$4b^2\, BP^2 = [(b+c)^2 - a^2]\ [a^2 - (b-c)^2],$$

$$4b^2\, BP^2 = (a+b+c)\ (b+c-a)\ (a+c-b)\ (a+b-c),$$

$$4b^2\, BP^2 = (a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c).$$

Faisant $a + b + c = 2p$, l'équation se change en

$$4b^2\, BP^2 = 2p\,(2p - 2a)\ (2p - 2b)\ (2p - 2c).$$

On déduit de cette dernière

$$BP = \frac{2}{b}\sqrt{[p\,(p-a)\ (p-b)\ (p-c)]}.$$

Substituant enfin cette valeur de BP dans l'équation (1), elle se réduit à

$$s = \sqrt{[p\,(p-a)\ (p-b)\ (p-c)]}.$$

On trouvera (n.° 74) l'application et la discussion de cette formule.

294. Le trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés seulement parallèles. Sa hauteur est la perpendiculaire commune à ces parallèles. Soient a, b ces deux dernières lignes, h la hauteur, et s la surface; on a

$$s = \frac{(a+b)}{2} \times h \quad (1).$$

Si l'on mène à distance égale des bases a, b; une parallèle p à ces droites, on démontre que $p = \frac{a+b}{2}$, et par conséquent $s = ph$ (2).

295. L'aire d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié de son rayon, ou bien au produit du carré de son rayon par le rapport de la circonférence au diamètre. Appelant π ce rapport, r le rayon, s la surface, on a $s = \pi r^2$.

On a vu (n.° 81) que $\pi = 3{,}1415926535$.

Soit $r = 20$ mètres; $s = 3{,}1415926535 \times 20^2$.
Faisant usage des logarithmes, on aura

$$\text{Log. } s = \text{log. } 3{,}1415926535 + 2 \text{ log. } 20.$$
$$\text{Log. } 3{,}1415926535 = 0{,}49714987.$$
$$2 \text{ log. } 20 = 2{,}60206000.$$
$$\text{Log. } s = 3{,}09920987.$$

D'où $s = 1256^{\text{m.c}},70$.

296. L'aire d'une ellipse dont on connaît les deux axes, équivaut à l'aire d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre les deux demi-axes. Soient a, b, les deux demi-axes de l'ellipse, et r le rayon moyen proportionnel, on a $r^2 = a\,b$. Il suit du n.° précédent, que l'aire de l'ellipse est exprimée par $\pi\,a\,b$. Supposons $a = 15^{\text{m}}$, $b = 13^{\text{m}}$, il viendra

$$\pi\,ab = 3{,}1415926535 \times 15 \times 13;$$

et par les logarithmes, on obtiendra facilement l'expression numérique de l'aire de l'ellipse, que l'on trouvera équivalente à $612^{\text{mc}},61$.

297. Pour évaluer la surface de l'espace compris entre une droite BF (*fig. 26*) et une courbe $FfghikB$ dont on ne connaît pas la loi, on élève sur BF des perpendiculaires assez rapprochées pour que les portions curvilignes Ff, fg, gh, &c. puissent être regardées sensiblement comme des lignes droites : alors il ne reste plus à évaluer que la surface d'une suite de triangles et de trapèzes.

[N.° 5.]

DÉPARTEMENT
d

ARROND.[t] COMM.[al]
d

CANTON d

PREMIER CAHIER.

CALCULS du Plan de la Commune d par Section et par Numéro de chaque Section ou Parcelle.

SECTION *A.*

Lettres des triang.[s]	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL de chaque numéro ou parcelle.
	SECTION *A.*		
N.° 1.	*Pré.*		
	met. met.	m. c.	arp. per. m. c.
a	233. 153.	35,649.	00. 00. 00.
b	233. 84.	19,572.	
c	93. 15.	1,395.	
d	150. 26.	3,900.	
e	192. 21.	4,032.	
f	225. 100.	22,500.	
g	225. 43.	9,575.	
h	222. 21.	4,662.	
i	221. 25.	5,525.	
k	216. 40.	8,640.	
l	223. 58.	12,934.	
m	223. 59.	13,157.	
n	82. 16.	1,312.	
o	82. 34.	2,788.	
p	45. 14.	630.	
N.° 2.	*Terre lab.*	146,271.	29. 35. 42.
a	85. 21.	1,785.	
b	98. 40.	3,920.	
c	169. 65.	10,985.	
d	169. 85.	13,365.	
e	93. 29.	2,697.	
f	43. 10.	430.	
g	157. 16.	2,512.	
h	151. 13.	1,963.	
		37,657.	7. 53. 14.
			36. 88. 56.

Lettres des triang.[s]	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL de chaque numéro ou parcelle.
			arp. per. m. c.
N.° 3.	*Terre lab.*	*Ci-contre.*	36. 88. 56.
	met. met.	m. c.	
a	140. 47.	6,580.	
b	78. 38.	2,964.	
c	83. 31.	2,573.	
d	157. 43.	6,751.	
e	178. 76.	13,528.	
f	88. 38.	3,344.	
g	88. 26.	2,288.	
h	67. 18.	1,206.	
N.° 4.	*Bruyère.*	39,234.	7. 84. 68.
a	251. 37.	9,287.	
b	261. 31.	8,091.	
c	267. 42.	11,214.	
d	267. 99.	26,433.	
e	255. 88.	22,440.	
f	236. 47.	11,092.	
g	231. 35.	8,185.	
h	210. 67.	14,070.	
i	210. 74.	15,540.	
k	150. 35.	5,250.	
l	119. 49.	5,831.	
m	88. 25.	2,200.	
n	90. 27.	2,430.	
N.° 5.	*Terre lab.*	142,063.	28. 41. 36.
a	57. 9.	513.	
b	57. 31.	1,767.	
		2,280.	
TOTAL de la première page..			73. 14. 50.

Lettres des triang.[s]	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL de chaque numéro ou parcelle.
		m. c.	arp. per. m. c.
N.° 5.	*De l'ant. p.*	2,280.	00. 00. 00.
	met. met.		
c	58. 18.	1,044.	
d	77. 19.	1,463.	
e	114. 63.	7,182.	
f	171. 65.	11,115.	
g	177. 40.	7,080.	
h	217. 45.	9,765.	
N.° 6.	*Jardin.*	39,929.	7. 98. 58.
a	33. 8.	264.	
b	33. 7.	231.	
c	31. 11.	341.	
N.° 7.	*Maison,*	836.	00. 16. 72.
a	28. 10.	280.	
b	22. 8.	176.	
c	12. 5.	60.	
d	20. 7.	140.	
N.° 8.	*Jardin.*	656.	00. 13. 12.
a	26. 10.	260.	
b	26. 13.	338.	
c	22. 9.	198.	
N.° 9.	*Maison.*	796.	00. 15. 92.
a	23. 8.	184.	
b	23. 9.	207.	
N.° 10.	*Pâturage.*	391.	00. 07. 82.
a	235. 60.	14,100.	
b	276. 115.	31,740.	
c	276. 58.	16,008.	
d	278. 108.	30,024.	
e	165. 63.	10,195.	
f	97. 16.	1,452.	
g	87. 22.	1,914.	
		105,433.	21. 08. 66.
			29. 60. 82.

Lettres des triang.[s]	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL de chaque numéro ou parcelle.
			arp. per. m. c.
N.° 11.	*Terre lab.*	*Ci-contre.*	29. 60. 82.
	met. met.	m. c.	
a	145. 24.	3,480.	
b	160. 40.	6,400.	
c	170. 35.	5,950.	
d	170. 77.	15,090.	
e	131. 28.	3,668.	
f	131. 30.	3,930.	
g	126. 55.	6,930.	
h	241. 92.	22,172.	
i	180. 53.	9,540.	
k	98. 10.	980.	
l	93. 30.	2,790.	
m	89. 42.	3,738.	
n	76. 43.	3,268.	
o	31. 7.	217.	
p	28. 4.	112.	
q	241. 48.	11,568.	
r	23. 5.	115.	
s	126. 26.	3,276.	
t	119. 19.	2,261.	
u	120. 39.	4,680.	
v	55. 8.	440.	
x	19. 8.	152.	
N.° 12.	*Maison.*	110,757.	22. 15. 14.
a	13. 6.	78.	
b	13. 6.	78.	
N.° 13.	*Cimetière.*	156.	00. 03. 12.
a	27. 13.	351.	
b	23. 12.	276.	
c	16. 4.	64.	
d	16. 5.	80.	
		771.	
TOTAL de la seconde page...			51. 79. 68.

Lettres des triang.[s]	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL de chaque numéro ou parcelle.
		m. c.	arp. per. m. c.
N.° 13.	*De l'aut. p.*	771.	
	met. met.		
e	11. 2.	22.	
N.° 14.	*Église.*	793.	00. 51. 86.
a	15. 6.	90.	
b	15. 6.	90.	
N.° 15.	*Maison.*	180.	00. 03. 60.
a	24. 10.	240.	
b	24. 5.	120.	
c	15. 7.	105.	
d	12. 4.	48.	
N.° 16.	*Maison.*	513.	00. 10. 26.
a	13. 5.	65.	
b	13. 5.	65.	
N.° 17.	*Vignes.*	130.	00. 02. 60.
a	115. 34.	3,910.	
b	140. 23.	3,220.	
c	140. 40.	5,600.	
d	106. 44.	4,664.	
N.° 18.	*Verger.*	17,394.	3. 47. 88.
a	88. 42.	3,696.	
b	20. 8.	160.	
c	20. 4.	80.	
d	55. 10.	550.	
e	285. 41.	11,485.	
f	295. 33.	9,735.	
g	251. 37.	9,287.	
h	198. 92.	18,216.	
		53,209.	10. 64. 18.
			14. 44. 38.

Lettres des triang.[s]	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL de chaque numéro ou parcelle.
			arp. per. m. c.
N.° 19.	*Verger.*	*Ci-contre.*	14. 44. 38.
	met. met.	m. c.	
a	118. 53.	6,254.	
b	229. 93.	21,297.	
c	458. 38.	17,404.	
d	142. 29.	4,118.	
e	118. 47.	5,546.	
f	90. 52.	4,680.	
g	80. 15.	1,200.	
		60,499.	12. 09. 98.
N.° 20.	*Bois.*		
a	113. 39.	4,407.	
b	113. 60.	6,780.	
c	63. 43.	2,709.	
d	115. 42.	4,830.	
e	100. 30.	3,000.	
f	62. 56.	3,172.	
		24,898.	4. 97. 96.

TOTAL de la troisième page... 31. 52. 32.

[N.° 6.]

DÉPARTEMENT
d

ARROND.[t] COMM.[al]
d

CANTON d

SECOND CAHIER.

VÉRIFICATION des Calculs du Plan.

SECTION *A.*

Lettres des triang.[s]	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL pour chaque CARRÉ.	Lettres des triang.[s]	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL pour chaque CARRÉ.
	Carré A^{1}.		arp. per. m.c. 00. 00. 00.		*Carré* A^{4}.		arp. per. m.c. 00. 00. 00.
	met. met.	m. c.			met. met.	m. c.	
a	321. 157.	50,397.		*a*	137. 31.	4,247.	
b	327. 59.	19,293.		*b*	135. 42.	5,670.	
c	327. 162.	52,974.		*c*	145. 20.	2,900.	
				d	250. 110.	27,500.	
		122,664.	24. 53. 28.	*e*	187. 16.	2,992.	
	Carré A^{2}.			*f*	164. 15.	2,460.	
a	212. 80.	16,960.		*g*	250. 95.	23,750.	
b	179. 23.	4,117.		*h*	175. 30.	5,252.	
c	189. 18.	3,402.		*i*	152. 20.	3,040.	
d	201. 39.	7,839.		*k*	137. 23.	3,151.	
e	212. 16.	3,392.		*l*	130. 20.	2,600.	
f	250. 110.	27,500.		*m*	125. 33.	4,125.	
g	125. 21.	2,625.					
h	110. 34.	3,740.				87,685.	17. 53. 70.
					Carré B^{1}.		
		69,575.	13. 91. 50.	*a*	250. 65.	16,250.	
	Carré A^{3}.			*b*	155. 97.	15,035.	
a	107. 57.	6,099.		*c*	202. 109.	22,018.	
b	107. 15.	1,605.					
c	108. 15.	1,620.				53,303.	10. 66. 06.
d	250. 68.	17,000.			*Carré* B^{4}.		
e	177. 34.	6,018.		*a*	125. 45.	5,625.	
f	139. 130.	18,070.		*b*	155. 25.	3,875.	
g	139. 13.	1,807.		*c*	250. 127.	31,750.	
h	130. 37.	4,810.		*d*	203. 14.	2,842.	
i	104. 47.	4,888.		*e*	197. 27.	5,319.	
		61,917.	12. 38. 34.			49,411.	

Lettres

Lettres des triang.	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL pour chaque CARRÉ.
	Ci-contre.	m. c. 49,411.	arp. per. m. c. 00. 00. 00.
	met. met.		
f	183. 24.	4,392.	
g	164. 26.	4,264.	
h	164. 30.	4,920.	
i	152. 22.	3,344.	
		66,331.	13. 26. 62.
	Carré C¹.		
a	117. 24.	2,808.	
b	117. 37.	4,329.	
c	167. 51.	8,517.	
d	250. 55.	13,750.	
e	135. 43.	5,805.	
f	153. 22.	3,366.	
g	250. 66.	16,500.	
h	129. 38.	4,902.	
i	83. 11.	913.	
k	86. 29.	2,494.	
		63,384.	12. 67. 68.
	Carré C².		
a	101. 26.	2,626.	
b	123. 31.	3,813.	
c	170. 24.	4,080.	
d	250. 117.	29,250.	
e	172. 35.	6,020.	
f	68. 28.	1,904.	
g	56. 21.	1,176.	
h	83. 39.	3,237.	
		52,106.	10. 42. 12.

Lettres des triang.	FACTEURS.	PRODUITS.	TOTAL pour chaque CARRÉ.
	Carré C¹.		arp. per. m.e. 00. 00. 00.
	met. met.	m. c.	
a	91. 48.	4,368.	
b	131. 27.	3,537.	
c	250. 71.	17,750.	
d	152. 19.	2,888.	
e	124. 23.	2,852.	
f	84. 44.	3,696.	
	Carré C⁴.	35,091.	7. 01. 82.
a	114. 39.	4,446.	
b	250. 94.	23,500.	
c	211. 71.	14,981.	
d	250. 141.	35,250.	
e	171. 14.	2,394.	
f	147. 30.	4,410.	
g	138. 21.	2,898.	
h	136. 18.	2,448.	
		90,327.	18. 06. 54.

RÉCAPITULATION

DU PREMIER CAHIER.		DU SECOND CAHIER ou DE LA VÉRIFICATION.				
PAGES ou feuillets.	CONTENANCES.	SÉRIE des carrés qui sont en partie hors du territoire de la section.	CONTENANCES de la portion de ces carrés hors du plan.	RELEVÉ et somme totale de ces contenances à soustraire du plan.	NOMBRE des carrés du plan et leurs contenances.	DIFFÉRENCE ou contenance de la section.
	arp. per. m. c.		arp. per. m. c.	arp. per. m. c.		
1.er	73. 14. 50.	A^1	24. 53. 28.			
2.e	51. 79. 08.	A^2	23. 91. 50.	68. 36. 82.	Le nombre total des carrés du plan est 12.	
3.e	31. 52. 32.	A^3	12. 38. 34.			
TOTAL.	156. 45. 90.	A^4	17. 53. 70.			
Chemins et places publiq.es	3. 06. 44.	B^1	10. 66. 06.	23. 92. 68.	La contenance de chaque carré est 25 arp.	
		B^4	13. 26. 62.			
Rivières et ruiss.aux	0. 00. 00.	C^1	12. 67. 68.		La contenance des douze carrés est	
		C^2	10. 42. 12.	48. 18. 16.		
		C^3	7. 01. 82.			
		C^4	18. 06. 54.			
					arp. per. m. c.	arp. per. m. c.
Contenance de la sect.on	159. 52. 34.			140. 47. 66.	300. 00. 00.	159. 52. 34.

§. VIII.

Tableau indicatif des Propriétaires, des Propriétés, et de leurs Contenances.

298. L'Ingénieur-vérificateur a déjà reçu dans ses bureaux la première partie du tableau indicatif; elle est confectionnée par le Géomètre du cadastre, d'après le mode exposé dans le §. V; il ne reste plus à l'Ingénieur qu'à remplir les sixième et septième colonnes, intitulées *Contenance par propriété*, et *Contenance par nature de culture.* Il trouvera les résultats qu'elles doivent présenter, dans le premier cahier de calculs du plan.

299. A la fin de chaque feuillet du tableau, il écrira le total de la surface de toutes les parcelles qui sont rapportées dans la page, ainsi que la contenance de toutes les pièces de terre de même culture : ces deux sommes, qui sont égales dans le modèle ci-après, au bas de chacun des feuillets, peuvent différer dans certains cas; mais quand le tableau de la section est en entier rédigé, si l'on ajoute alors les totaux respectifs de ces deux colonnes, on doit arriver à deux nombres identiques, puisqu'ils sont l'un et l'autre l'expression d'une même surface. On exécute cette preuve par les deux opérations qui sont l'objet des n.os 300 et 301.

300. Pour connaître le nombre d'arpens métriques que compose l'ensemble de toutes les parcelles de la section, il faut additionner (299) les divers totaux qui terminent, à chaque page, la sixième colonne du tableau indicatif; mais, quand les parcelles d'une section sont très-nombreuses, ces sommes partielles sont très-multipliées. On préviendra souvent des erreurs de calcul, en formant un total particulier de la réunion de dix feuillets, puis une somme finale de ces derniers totaux. *Voyez*, à la fin du tableau indicatif, les colonnes ayant pour titre *Récapitulation des contenances.*

301. A la suite de cette récapitulation, on fera le relevé des résultats de la septième colonne, ou des diverses natures de culture de la section, en se conformant à la division observée dans la partie du tableau qui contient ce relevé; on ajoutera à l'article des objets non imposables, l'aire

du territoire occupé par les rivières et ruisseaux, les chemins et places publiques (§. VII); enfin on déduira de cette dernière analyse le résumé général, tel qu'on le voit établi à la fin du tableau, et dont le total donne la contenance entière de la section.

302. Chaque section de la commune exige un semblable travail; et en rassemblant tous les résumés généraux, il est facile d'obtenir l'expression de l'aire de toute la commune en arpens et perches métriques. Le tableau indicatif doit être précédé, conformément aux arrêtés du Ministre, du rapport des nouvelles mesures avec les mesures de la commune.

DÉPARTEMENT
d

ARRONDISSEMENT
d

CANTON d

COMMUNE
d

SECTION *A.*

TABLEAU INDICATIF des Propriétaires, des Propriétés foncières et de leurs contenances.

RAPPORT des nouvelles Mesures avec les Mesures de la Commune.

L'arpent métrique..	en arpens de la commune...............	vaut 2 arpens	460.
	en jallois................................	1 jallois	222.
La perche métrique.	en perches de la commune....................	3 perches	333.
	en quartels................................	2 quartels	611.
Le mètre.........	en verges de la commune.....................	1 verge	110.
	en bicherées................................	2 bicherées	700.

CANTON, triages ou lieux-dits.	NUMÉROS du plan provis.[rs]	NUMÉROS du plan définit.[fs]	NOMS, PROFESSIONS ET DEMEURES des propriétaires ou usufruitiers.	NATURE des propriétés.	CONTENANCE par propriété.	CONTENANCE par nature de culture.	OBSERVATIONS.
					arp. per. m.c.	arp. per. m.c	
Canton d		1.	Philippe, négociant, demeurant à Lyon....	Pré.......	29. 35. 42.	29. 35. 42.	Ce pré est planté d'arbres.
		2.	Charles, cultivateur, demeurant dans la com.[e]	Terre lab.[e].	7. 53. 14.	15. 37. 82.	Ces deux parcelles contiguës, de même culture, sont divisées par des haies.
		3.	Le même..........	Terre lab.[e].	7. 84. 68.		
		4.	Victor, commerçant, demeurant à Limoges..	Bruyères...	28. 41. 26.	28. 41. 26.	
		5.	Philippe, négociant, demeurant à Lyon....	Terre lab.[e].	7. 98. 58.	7. 98. 58.	
		6.	Le même..........	Jardin pot.[r]	0. 16. 72.	0. 16. 72.	
		7.	Le même..........	Maison....	0. 13. 12.	0. 13. 12.	
		8.	Antoine, notaire, demeurant à Toulouse...	Jardin d'ag.[t]	0. 15. 92.	0. 15. 92.	
		9.	Le même..........	Maison....	0. 07. 82.	0. 07. 82.	
		10.	Augustin, agent de change, dem.[t] à Paris..	Pâturage...	21. 08. 66.	21. 08. 66.	Ce pâturage couvre une habitation souterraine et des caves appartenant à M. Bernard de Paris.
			TOTAL du premier feuillet....		102. 75. 32.	102. 75. 32.	

CANTON, triages ou lieux-dits.	NUMÉROS du plan provis.res	NUMÉROS du plan définit.fs	NOMS, PROFESSIONS ET DEMEURES des propriétaires ou usufruitiers.	NATURE des propriétés.	CONTENANCE par propriét.	CONTENANCE par nature de culture.	OBSERVATIONS.
					arp. per. m.c.	arp. per. m.c.	
		11.	Augustin, agent de change, dem.t à Paris..	Terre lab.e.	22. 15. 14	22. 15. 14.	
		12.	Jean, laboureur, demeurant dans la com.e.	Maison....	0. 03. 12.	0. 03. 12.	
		13.	....	Cimetière..	0. 15. 86.	0. 15. 86.	
		14.	....	Église.....	0. 03. 60.	0. 03. 60.	
		15.	Philippe, négociant, demeurant à Lyon.....	Maison....	0. 10. 26.	0. 10. 26.	
		16.	Le même..........	Maison....	0. 02. 60.	0. 02. 60.	
		17.	Le même..........	Vignes....	3. 47. 88.	3. 47. 88.	
		18.	Silvestre, cultivateur, dem.t dans la commune.	Verger....	10. 64. 18.	22. 74. 16.	Ces deux parcelles, de même culture, sont séparées par un fossé.
		19.	Le même	Verger....	12. 09. 98.		
		20.	Philippe, négociant, demeurant à Lyon	Bois futaie.	4. 97. 96.	4. 97. 96.	
			TOTAL du 2.e feuillet		53. 70. 58.	53. 70. 58.	

RECAPITULATION DES CONTENANCES.

NUMÉROS des feuilles.	CONTENANCES.	RAPPORT DES TOTAUX.	
	arp. per. m.c.		arp. per. m.c.
1.er....	102. 75. 32.	1.er total.	156. 45. 90.
2.e.....	53. 70. 58.	2.e total.	″
3.e.....	″	3.e total.	″
....		....	
10.e....	″	TOTAL général.	156. 45. 90.
1.er total	156. 45. 90.		
11.e....	″		
12.e....	″		
....			
20.e....	″		
2.e total.	″		
&c.			

RELEVÉ DES NATURES DE CULTURE DE LA SECTION A.

NATURE des propriétés.	CONTENANCES.	NATURE des propriétés.	CONTENANCES.
Propriétés non bât.s	arp. per. m.c.	*Propriétés bâties.*	arp. per. m.c.
IMPOSABLES.		IMPOSABLES.	
Pré.........	29. 35. 42.	Maison......	0. 13. 12.
2 Terres labour.es	15. 37. 82.	Maison......	0. 07. 82.
Bruyère......	28. 41. 26.	Maison......	0. 03. 12.
Terre labour.e	7. 98. 58.	Maison......	0. 10. 26
Jardin potager.	0. 16. 72.	Maison......	0. 02. 60.
Jardin d'agré.t	0. 15. 92.		
Pâturage.....	21. 08. 66.		
Terre labour.e	22. 15. 14.		
Vignes.......	3. 47. 88.		
2 Vergers......	22. 74. 16.		
Bois futaie....	4. 97. 96.		
NON IMPOSABLES.	155. 89. 52.	NON IMPOSABLES.	0. 36. 92.
Cimetière......	0. 15. 86.	Église.......	0. 03. 60.
Chemins et places publiques	3. 06. 44.		
	3. 22. 30		

RÉSUMÉ.

		NOMBRE.	CONTENANCES.
			arp. per. m.c.
PROPRIÉTÉS NON BÂTIES.....	imposables	13.	155. 89. 52.
	non imposables..................	2.	3. 22. 30.
TOTAL des propriétés non bâties..............		15.	159. 11. 82.
PROPRIÉTÉS BÂTIES.........	imposables	5.	0. 36. 92.
	non imposables..................	1.	0. 03. 60.
TOTAL GÉNÉRAL............................		21.	159. 52. 34.

§. IX.

Bulletins des Propriétaires.

303. L'Ingénieur-vérificateur s'occupera de la formation de ces bulletins, aussitôt qu'il aura terminé le tableau indicatif de la commune; il se conformera, pour leur rédaction et pour la manière de les faire parvenir à chaque propriétaire, aux articles 21 et 22 de l'arrêté du 1.er décembre, ainsi qu'aux réflexions de l'Instruction du 20 avril (pages XV et XVI). Chaque bulletin sera tracé sur le modèle que l'on trouvera rempli à la fin de ce paragraphe, et précédé d'une lettre d'envoi, dont la teneur, approuvée par le Ministre, est également rapportée. Quand ces bulletins sont rentrés dans les bureaux de l'Ingénieur, il fait exécuter sur les plans parcellaires les changemens que les réclamations reconnues justes ont exigés; enfin il opère les rectifications convenables sur les bulletins et le tableau indicatif.

304. L'article 24 de l'arrêté du 1.er décembre accorde un mois aux propriétaires, fermiers ou représentans, pour examiner les bulletins, y donner leur adhésion, ou présenter leurs réclamations. Dans ce dernier cas, la conduite du Préfet, de l'Ingénieur et du réclamant, est tracée par les articles 25 et 26 du même arrêté.

A M. Philippe
propriétaire, négociant
demeurant à Lyon, rue

305. *Je vous envoie, Monsieur, le tableau de toutes les propriétés qui sont portées sous votre nom, dans le cadastre parcellaire de la commune d et de la contenance reconnue à chacune de ces propriétés par l'arpentage.*

Je vous invite à examiner si ce tableau présente toutes vos propriétés et leurs véritables contenances.

Dans le cas où vous reconnaîtriez des erreurs, soit dans le nombre ou la désignation des propriétés, soit dans les contenances, je vous prie de mettre vos observations à la suite de chaque article qui vous en paraîtrait susceptible.

Il importe à la conservation de vos intérêts, que tous vos biens soient exactement portés dans le plan parcellaire; ce motif vous portera sans doute

à remettre à M. le Maire de la commune, dans le délai d'un mois, qui expirera le prochain, le présent tableau avec vos observations et signé de vous.

Les erreurs de noms ou de calculs que vous auriez pu remarquer, seront corrigées aussitôt que ce bulletin me sera parvenu. Si votre réclamation porte sur des contenances que vous croiriez n'avoir point été bien mesurées, vous aurez le droit de demander le réarpentage, offrant d'en payer les frais si la réclamation n'est pas fondée.

Je crois nécessaire de vous faire observer, à cet égard, qu'il est accordé aux Géomètres, par l'art. 12 de l'Instruction, une latitude d'un 50.me pour le calcul des superficies, et que votre réclamation ne serait point susceptible d'être admise, si elle portait sur une différence moindre d'un 50.me

Comme la contenance de chaque propriété est exprimée en nouvelles mesures; pour que vous puissiez en reconnaître l'exactitude, voici le rapport de ces nouvelles mesures avec celles usitées dans la commune.

J'ai l'honneur de vous saluer.

L'Ingénieur-vérificateur du Cadastre,

RAPPORT

Des nouvelles Mesures avec les Mesures de la Commune.

		VAUT		ET ENVIRON,
L'arpent métrique..	En arpens de la commune.	2 arpens..	460.	Deux arpens $\frac{1}{2}$.
	En jallois...............	1 jallois...	222.	Un jallois $\frac{1}{4}$.
La perche métrique.	En perches de la commune.	3 perches.	333.	Trois perches $\frac{1}{3}$.
	En quartels.............	2 quartels.	611.	Deux quartels $\frac{1}{2}$.
Le mètre.........	En verges de la commune.	1 verge...	110.	Une verge $\frac{1}{10}$.
	En bicherées...........	2 bicherées	700.	Une bicherée $\frac{3}{4}$.

NUMÉROS

NUMÉROS d'ordre.	SECTIONS.	NUMÉROS du Plan.	CANTONS ou lieux-dits.	NATURE des Propriétés.	CONTENANCES.	OBSERVATIONS du PROPRIÉTAIRE.
1.	A.	1.	Canton de		arp. per. m. c.	
			....	Pré.......	29. 35. 42.	
		5.	*Idem*.....	Terre lab.e.	7. 98. 58.	
		6.	*Idem*.....	Jardin pot.r	0. 16. 72.	
		7.	*Idem*.....	Maison....	0. 13. 12.	
		15.	*Idem*.....	Maison....	0. 10. 26.	
		16.	*Idem*.....	Maison....	0. 02. 60.	
		17.	*Idem*.....	Vignes....	3. 47. 88.	
		20.	*Idem*.....	Bois futaie.	4. 97. 96.	
			TOTAL des contenances........		arp. per. m. c. 46. 22. 54.	
			Revenant, en mesures de la commune, à		arp. per. verg. 113. 96. 26,7.	
			Environ......		113 arp. $\frac{4}{5}$.	

Je soussigné, propriétaire de la commune d
déclare le présent état exact et conforme aux propriétés que je possède, sauf les observations que j'y ai ajoutées.

A *le* Philippe.

§. X.

Atlas et Tableau d'assemblage.

306. Le tableau d'assemblage *(pl. 10)*, ou plan général de la commune, est la première carte que doit présenter l'atlas prescrit par l'article 2 de l'Instruction du 1.er décembre ; c'est une copie exacte ou réduite du plan linéaire (217), qui doit représenter fidèlement, outre les objets énoncés dans ce numéro et dans l'article 1.er de l'arrêté, les montagnes ou collines, les moulins à eau ou à vent, les fermes et maisons isolées. Ces détails

abrégent les recherches sur les cartes sectionnaires que l'on a besoin de consulter.

307. Chaque section de la commune compose une carte particulière, que, pour cette raison, on nomme *carte sectionnaire*. On range ces cartes dans l'atlas, suivant l'ordre alphabétique des lettres par lesquelles on désigne les sections; autour de leurs périmètres on a soin d'écrire, en caractères bien tracés, le nom des autres sections ou des territoires limitrophes qui les terminent; et chaque espèce de propriété y est figurée par une teinte propre et conventionnelle. C'est en cela que les cartes de l'atlas diffèrent des plans parcellaires sur lesquels elles sont calquées, et où chaque polygone est distingué par un numéro, et son contour par un simple trait, comme on le voit *(pl. 11)*.

308. Lorsque l'étendue ou la configuration d'une section ne permet pas de la rapporter sur une feuille de papier grand-aigle, on en fait alors l'objet de plusieurs feuilles appelées *cartes divisionnaires*, ayant égard, pour assigner leurs limites, aux considérations exposées (237), et pour faciliter leurs rapprochemens, à l'ordre prescrit (307).

309. Si quelques portions du territoire d'une section, d'ailleurs susceptible d'être levée sur l'échelle de 1 à 5000 *(pl. 11)*, exigent d'être étendues sur une échelle plus grande (238), on forme alors une feuille particulière de développement pour ces polygones, et l'on indique avec soin, par des annotations correspondantes, la fraction du territoire que l'on a détaillée. Cette feuille doit suivre immédiatement, dans l'atlas, la carte sectionnaire à laquelle elle se rapporte. On trouvera *(pl. 10, n.° 12)* le développement, sur l'échelle de 1 à 2500, de plusieurs numéros de la section *A*.

310. Au bas du tableau d'assemblage et de chaque carte sectionnaire ou divisionnaire, l'Ingénieur tracera l'échelle dont il se sera servi; puis, ayant rassemblé toutes ces cartes dans l'ordre qu'elles doivent conserver, il en fera dresser une seconde copie, et fera relier avec propreté ces deux expéditions : enfin il déposera dans les bureaux de la direction les diverses pièces énoncées art. 28 de l'arrêté du 1.er décembre, ainsi que le procès-verbal de délimitation, §. I; le canevas et registre [n.° 4] des opérations trigonométriques, §. II; et le second cahier des calculs du plan, §. VII.

§. XI.

Dessin des Plans.

TRAIT.

311. La minute et la copie des plans s'exécuteront sur des feuilles de papier grand-aigle.

Les contours de tous les polygones représentés sur le plan linéaire et le tableau d'assemblage, ainsi que les périmètres de toutes les parcelles figurées sur les plans de détails, seront tracés à l'encre de la Chine. Ce travail graphique exige la plus grande netteté.

312. Les grandes routes et chemins publics seront marqués de même par des lignes pleines, qui rendront très-sensibles leurs diverses sinuosités, de manière qu'il puisse être facile d'appliquer les procédés du calcul des contenances à l'estimation de leur superficie. Les chemins pratiqués par les particuliers pour conduire à leurs habitations ou dans l'intérieur de leurs terres, n'étant pas d'une utilité commune, n'ont pas été compris, par cette raison, dans la classe des objets non imposables; il suffit donc d'indiquer la présence de ces chemins par une simple ligne ponctuée. Les sentiers vicinaux très-étroits seront aussi représentés de cette manière.

313. Les fossés seront distingués, suivant leur largeur, par deux lignes plus ou moins rapprochées; mais on se contentera d'une seule ligne très-déliée, dans les pays où, l'habitude étant de fermer tous les héritages par des fossés, il résulterait une trop grande confusion de la multiplicité des doubles lignes.

314. Les ravins, les excavations, les sentiers enfoncés, les mares qui se trouvent souvent au milieu des terres labourables ou dans les lieux qui ont été anciennement fouillés, seront figurés sur le plan proportionnellement à leur grandeur réelle, et fidèlement placés relativement aux objets environnans. Toutes ces cavités seront ombrées par un trait plus prononcé du côté du nord, si leur direction est de l'est vers l'ouest; ou du côté de l'ouest, lorsqu'elle a lieu du nord au sud.

Au contraire, les montagnes, les collines, les chaussées et autres élévations, seront ombrées par un trait plus fort du côté du sud, si elles vont de l'est à l'ouest; et du côté de l'est, si elles se dirigent du nord au sud.

COULEURS.

315. L'Instruction du 20 avril dit que les masses de cultures dans l'atlas parcellaire seront coloriées des mêmes teintes que celles employées pour les copies des plans qui ont été dessinés à Paris et renvoyés dans les départemens, et que le tableau d'assemblage ne sera colorié que comme l'étaient les calques des plans par masses de cultures : ainsi chaque Ingénieur-vérificateur trouvera dans son département des modèles qu'il pourra consulter, et auxquels il devra se conformer.

316. La minute des plans remis à l'Ingénieur en chef par les Géomètres du cadastre, doit être déjà coloriée dans quelques parties. Les bâtimens et les murailles s'y trouveront marqués en carmin fin; les montagnes, par une teinte formée d'un mélange d'encre de la Chine, de carmin et de gomme gutte. Le Géomètre aura soin d'appliquer ces couleurs avec assez de précaution et de légèreté pour que la netteté des traits ne soit pas altérée; mais, après la vérification et le calcul des contenances, l'Ingénieur-vérificateur pourra colorier la copie de ces minutes de plans, d'un ton plus ferme, et rendre les nuances plus sensibles et plus variées. Sur le plan linéaire et le tableau d'assemblage, il enveloppera chaque section de la commune d'un filet de couleur différente, et transportera le même filet sur les cartes sectionnaires correspondantes. Les propriétés bâties recevront une teinte de carmin plate: les rivières, étangs et ruisseaux seront distingués avec le *vert-d'eau;* et les forêts impériales et communales, avec une teinte verte conforme aux modèles.

317. Toutes les couleurs mixtes que l'Ingénieur a besoin de produire pour le dessin des plans de l'atlas, peuvent être obtenues par le mélange des quatre couleurs élémentaires suivantes : l'encre de la Chine, la gomme gutte, le carmin et l'indigo. Elles sont d'un transport et d'un usage faciles, en même temps qu'elles conservent leur éclat et leur solidité pendant une longue suite d'années.

ÉCRITURE.

318. Les écritures devront être placées de manière à ne pas nuire à la netteté des détails : les caractères seront en *lettres bâtardes*, et leur hauteur sera décroissante pour chacun des objets ci-après ; savoir :

TABLEAU D'ASSEMBLAGE.

1.° Son titre et le nom des communes limitrophes;
2.° La désignation des diverses sections du territoire;
3.° Le nom du chef-lieu et celui des hameaux;
4.° Les objets isolés dont la désignation paraîtra utile.

CARTES SECTIONNAIRES ET DIVISIONNAIRES.

1.° Leur titre et le nom des communes ou sections limitrophes;
2.° Le nom du chef-lieu et celui des hameaux;
3.° Le nom des cantons, triages ou lieux-dits;
4.° Les objets dont la désignation pourra être utile.

Nota. *Pour ne pas surcharger le plan parcellaire d'un trop grand nombre de lignes, et ne pas multiplier inutilement les articles des divers modèles relatifs aux cahiers de calcul et au tableau indicatif, on a donné une grande étendue à chaque numéro de la figure 24* (planche 11) : *mais il arrive le plus souvent qu'une pièce de terre de même culture est partagée entre plusieurs propriétaires; alors il faut distinguer par des numéros particuliers toutes ces parcelles, et tracer sur le plan leur périmètre : il en résulte une multitude de polygones dont les côtés se croisent et se rencontrent sous toutes les directions. Chacune de ces petites propriétés exige du Géomètre un travail semblable à celui que l'on a présenté dans cet ouvrage sur les vingt numéros du plan parcellaire : ces nombreux détails augmentent la longueur des opérations, sans les rendre plus difficiles; c'est pourquoi l'on s'est contenté de représenter l'effet de ces sous-divisions du terrain, en les exécutant sur les n.os 5, 17 et 19.*

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE III. Opérations géodésiques.

§. VII.

FIN DE LA TABLE.

IMPRIMÉ

Par les soins de J. J. MARCEL, Directeur général de l'Imprimerie impériale, Membre de la Légion d'honneur.



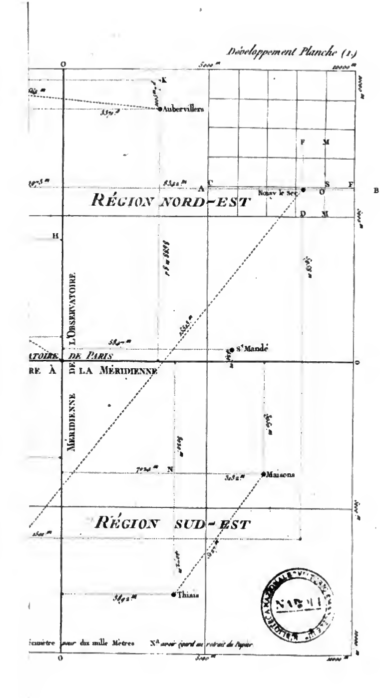
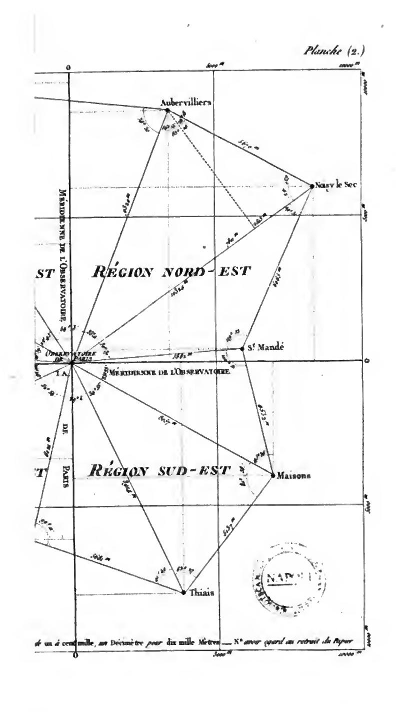
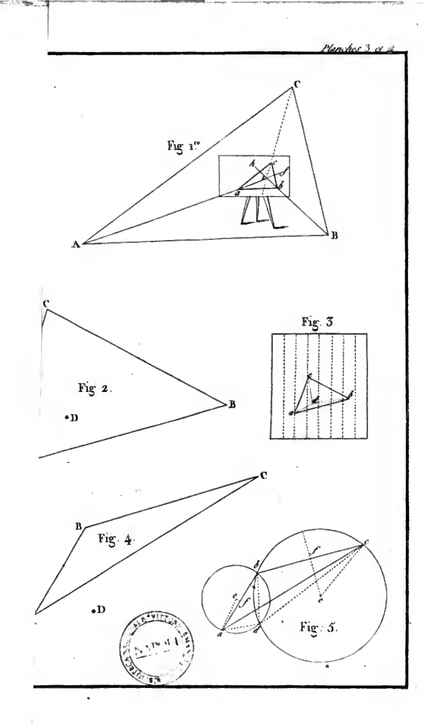
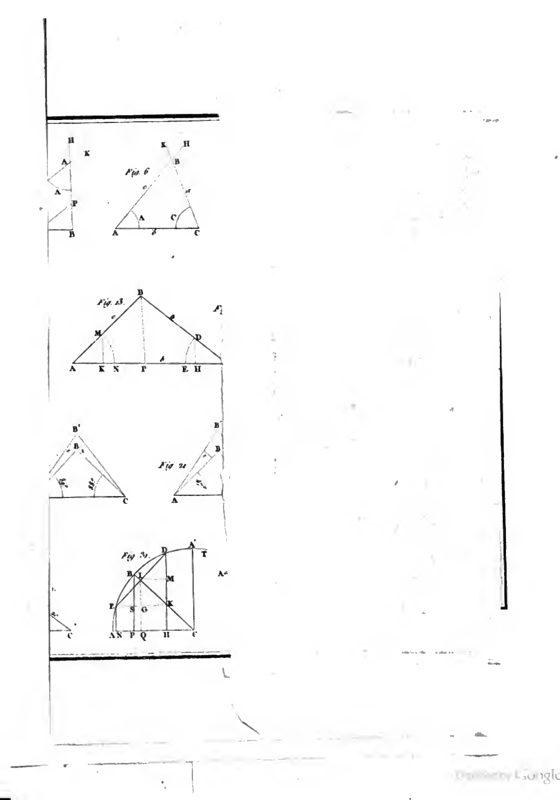

Aubervillers
Région nord-est
Noisy le Sec
L'Observatoire
de Paris
la Méridienne
Méridienne
St Mandé
Maisons
Région sud-est
Thiais
pour dix mille Mètres
Na avoir égard au retrait du Papier
A
B
C
D
F
H
K
M
N
O
S

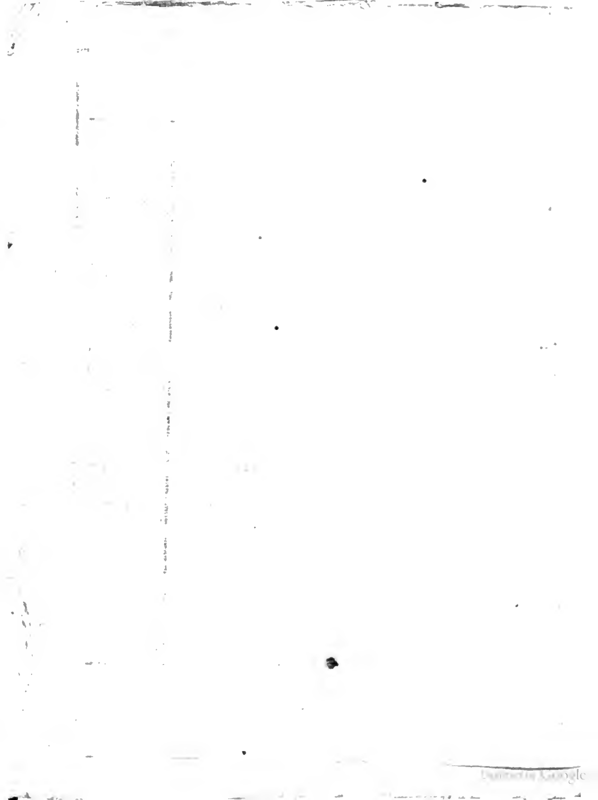
Planche (2.)


Aubervilliers
Noisy le Sec
RÉGION NORD-EST
St Mandé
OBSERVATOIRE DE PARIS
MÉRIDIENNE DE L'OBSERVATOIRE
MÉRIDIENNE DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
RÉGION SUD-EST
Maisons
Thiais
... un à cent mille, un Décimètre pour dix mille Mètres __ N.a avoir egard au retrait du Papier

Planches 3 et 4.




Fig. 6
Fig. 13
Fig. 21
Fig. 31



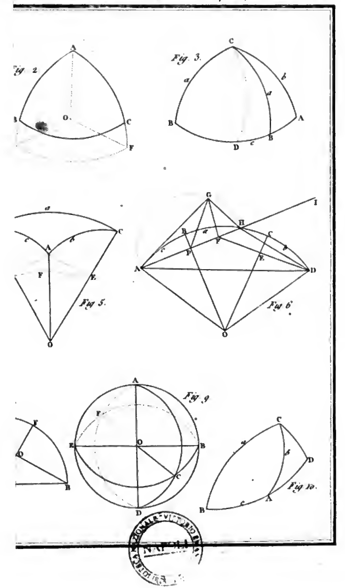
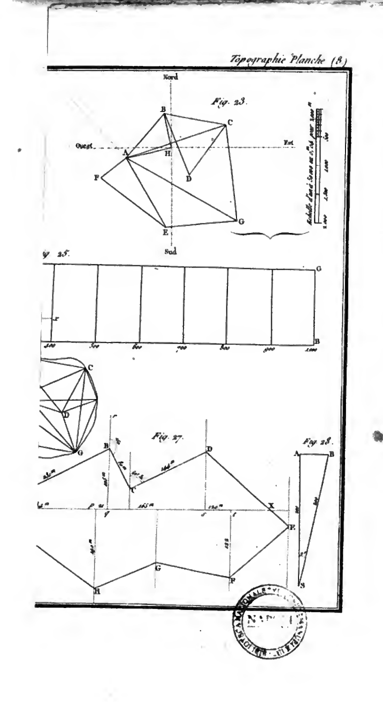

Fig. 2
A
B
O
C
F
Fig. 3
C
a
b
a
B
A
D
c
B
a
C
c
A
b
F
E
Fig. 5
O
G
I
H
B
a
C
c
P
F
b
E
A
D
Fig. 6
O
A
Fig. 9
F
E
O
B
C
D
F
D
B
C
a
b
D
Fig. 10
A
c
B

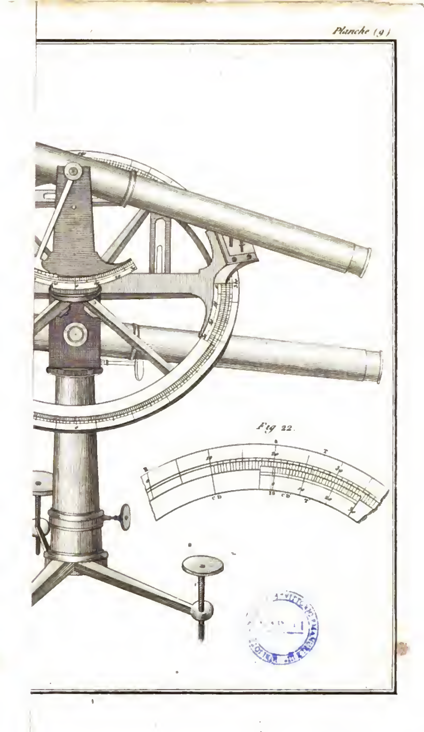
Fig. 14

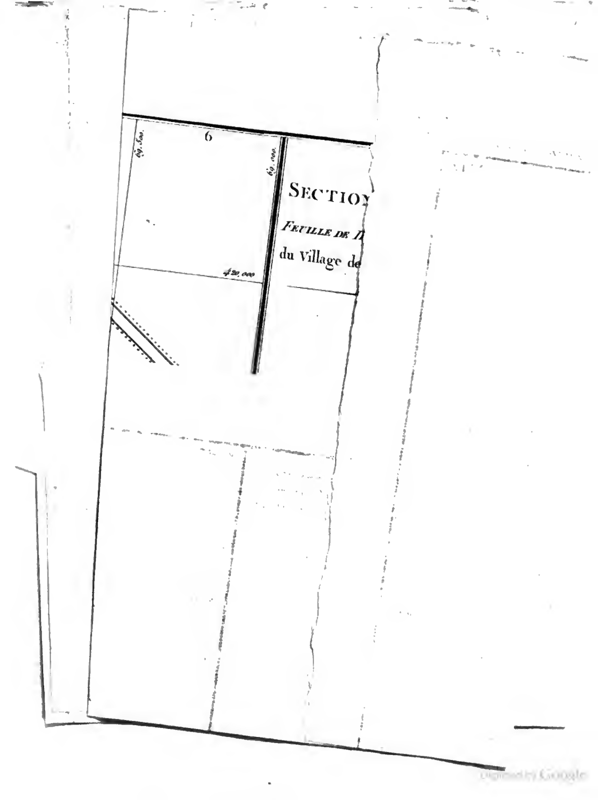
Fig. 13.

Fig. 16

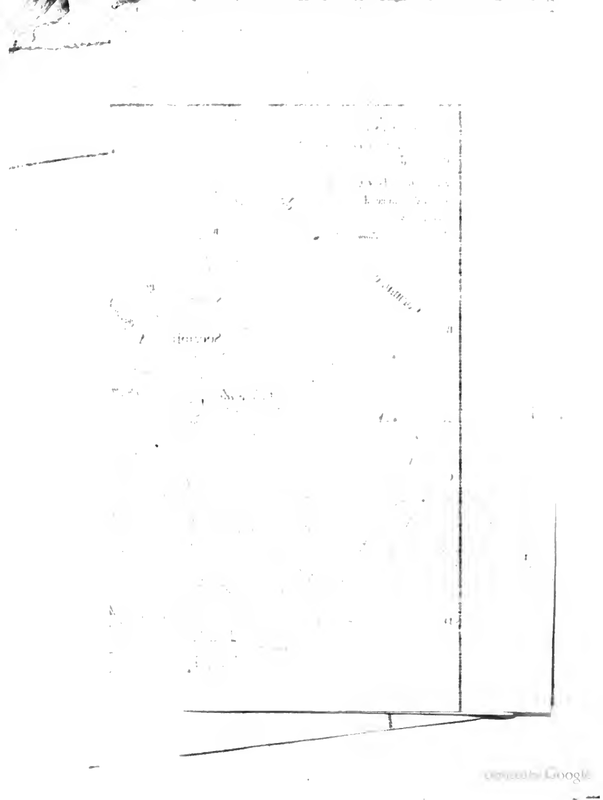
Fig. 19.


Fig. 23.
Nord
Sud
Ouest
Est
Fig. 27.
Fig. 28.


Fig 22.



6
69,500.
69,000.
SECTION
FEUILLE DE
du Village de
420,000



3
4
70,500.
419,500.
70,000.
Fig. 24
de
Commune

